Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова
Государственный Астрономический Институт им. П.К. Штернберга

На правах рукописи
УДК 523.9

Сергей Витальевич Аюков

Гелиосейсмологические аспекты теории внутреннего строения Солнца

Специальность 01.03.02 – Астрофизика и радиоастрономия

Диссертация на соискание
ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научные руководители
к.ф.-м.н., доцент Э.В.Кононович
к.ф.-м.н. В.А.Батурин

Москва, 1996

Оглавление

Введение

Актуальность работы

Эта работа находится на стыке двух разделов физики Солнца, которые сейчас претерпевают медленное слияние: классической теории внутреннего строения и бурно развивающейся гелиосейсмологии.

Задача о построении модели внутреннего строения звезды была поставлена давно и общие методы ее решения хорошо известны. В применении к Солнцу первые модели на современном уровне были получены М.Шварцшильдом в 1950-х годах и с тех пор общие принципы почти не изменились. После Шварцшильда уточнения солнечной модели в основном сводились к уточнениям физических законов: уравнения состояния, ядерных реакций, коэффициента поглощения вещества, развитию теории процессов переноса энергии и т.д. По сути дела эта теория использует очень мало наблюдательных данных – это масса, радиус, светимость, возраст Солнца и оценки содержания элементов тяжелее гелия.

С измерением потока нейтрино, приходящих от Солнца, и колебаний солнечной поверхности эта область физики Солнца получила новый толчок. Впервые были получены численные данные, непосредственно зависящие от условий внутри Солнца. Нейтринные эксперименты и открытие колебаний произошли примерно в одно и то же время (начало 1960-х гг.), однако природа солнечных осцилляций была понята гораздо позднее (конец 1960-х – начало 1970-х гг.) Несмотря на это, в астрофизике солнечных нейтрино до сих пор существуют значительные нерешенные проблемы, в то время как гелиосейсмология достигла больших успехов на пути к лучшему пониманию строения Солнца и физики плазмы. Колебания дают огромный объем наблюдательного материала – тысячи так называемых собственных частот. Усилиями теоретиков из них были получены глобальные характеристики Солнца: профиль скорости звука вдоль радиуса, глубина конвективной зоны и параметры конвективной оболочки (содержание гелия и удельная энтропия вещества конвективной зоны). Однако собственные частоты колебаний стандартной модели Солнца не совпадают с наблюдаемыми, и ошибка значительно превосходит погрешности наблюдений. Фактически это означает, что наблюдательные данные содержат информацию, которую можно выделить.

Классическая задача о моделировании внутреннего строения Солнца не потеряла актуальности в настоящее время в связи с, одной стороны, непрерывным уточнением теоретических представлений о физике высокотемпературной плазмы, и, с другой, благодаря бурному развитию гелиосейсмологии, которая требует высокоточных расчетов распределений физических величин внутри модели. В 90-х годах происходит переход к новому поколению моделей Солнца, отличающихся прежде всего высокой внутренней математической согласованностью, что позволяет не только выделять и изучать весьма малые эффекты влияния различных физических предположений, но и анализировать внутренние связи между параметрами в задаче о моделировании строения Солнца.

Как отмечается в одном из недавних обзоров по теории внутреннего строения Солнца и гелиосейсмологии, эта область науки находится сейчас в переходном состоянии: имеется большое количество наблюдательных данных (нейтринные измерения и гелиосейсмические результаты), теоретические методы большей частью разработаны, но не настолько хорошо, чтобы преодолеть все сложности проблемы. Несколько больших наблюдательных проектов вступит в строй в ближайшее время, часть из них начала давать результаты (см. гл. 1). Можно ожидать, что эти проекты не только не решат существующие проблемы теории, но и наоборот, принесут новые загадки и противоречия в наши знания о Солнце.

Цели и задачи диссертации

Основной целью диссертации является получение модели внутреннего строения Солнца, которая удовлетворяла бы гелиосейсмическим данным. Собственные частоты колебаний современной стандартной модели Солнца не совпадают с получаемыми из наблюдений. С другой стороны, стандартная модель Солнца базируется на множестве предположений и физических данных, некоторые из которых могут содержать значительные ошибки (например, коэффициент поглощения вещества – непрозрачность) либо быть просто неверными (предположение о пренебрежимой малости диффузии элементов в течение эволюции Солнца). В работе исследована возможность получить как можно более близкую к результатам наблюдений модель путем вариации физических данных (по возможности в пределах их ошибок) или отказа от некоторых предположений. Одной из наиболее плохо известных величин в физике внутреннего строения

Солнца является непрозрачность, поэтому основные усилия были направлены на исследование вопроса о том, можно ли построить гелиосейсмическую модель Солнца с помощью модификаций непрозрачности.

Для этого необходимо изучить влияние непрозрачности на модель Солнца (понять, какие коррекции необходимо внести в величину коэффициента поглощения, чтобы получить требуемые изменения в модели). Эта задача в свою очередь влечет за собой необходимость рассчитывать модели Солнца, причем с равномерно высокой точностью как в ядре, так и во внешних частях модели. До недавнего времени не существовало методик расчета моделей с гарантированно высокой точностью, в то время как относительные ошибки наблюдаемых значений собственных частот колебаний Солнца составляют примерно 10^{-5}.

Изучение влияния непрозрачности на модель Солнца не может принести результатов, если неясно, как описать это влияние. Для этого необходимо понять, какими ключевыми параметрами может быть охарактеризована модель Солнца. Эти параметры желательно выбирать так, чтобы они с равной легкостью получались и из теории внутреннего строения, и из гелиосейсмологии (в данной работе в качестве таких параметров предлагается принять содержание гелия в конвективной зоне и значение удельной энтропии вещества адиабатической части конвективной зоны).

Научная новизна

В работе впервые разработана и применена методика расчетов модели Солнца с высокой, наперед заданной, равномерной по радиусу точностью и даны численные оценки параметров, требуемые для ее достижения. Показана эффективность использования удельной энтропии вещества адиабатической части конвективной зоны в качестве ключевого параметра модели в целом. Изучено влияние величины непрозрачности в разных частях Солнца на модель; обнаружена и представлена в параметрическом виде связь между непрозрачностью и параметрами конвективной оболочки Солнца (содержанием гелия и удельной энтропией вещества). Разработан и применен метод расчета модели Солнца с наперед заданной скоростью звука.

Научная и практическая значимость работы

Разработанные методы и полученные результаты могут быть использованы во всех работах, требующих точных моделей внутреннего строения Солнца.

Методика расчета моделей с высоким уровнем точности необходима для гелиосейсмологических исследований Солнца и звезд. Изученная связь между непрозрачностью и основными параметрами модели позволяет прогнозировать поведение модели Солнца при том или ином изменении непрозрачности. Расчет моделей с заданной скоростью звука в лучистой зоне представляет собой еще один шаг на пути к модели Солнца, согласующейся с данными гелиосейсмологии. Рассчитанные стандартные и нестандартные модели могут служить базовыми моделями для решения обратных задач гелиосейсмологии. Эти результаты вкупе с ожидаемыми вскоре данными крупнейших проектов по наблюдению колебаний Солнца (GONG, SOHO и др.) должны привести к дальнейшему уточнению наших знаний о внутреннем строении Солнца.

Положения, выносимые на защиту

1. Разработана методика расчета моделей внутреннего строения Солнца с заданным уровнем точности, равномерным по радиусу. Метод реализован в виде компьютерного кода для таких расчетов и доказана его работоспособность и эффективность, в частности путем сравнения с расчетами независимых групп исследователей.
2. Рассчитаны стандартные модели Солнца с несколькими таблицами непрозрачностей. Исследовано влияние непрозрачности на глобальные параметры модели в рамках задачи о расчете стандартной модели Солнца.
3. Открыта связь между величиной непрозрачности в лучистой зоне Солнца и удельной энтропией вещества адиабатической части конвективной зоны. Показано, что увеличение непрозрачности в *лучистой зоне* на 30% ведет к уменьшению энтропии на 2.3% и увеличению общего содержания гелия на 0.014 по массе. Наоборот, увеличение непрозрачности в *ядре* модели на 30% увеличивает содержание гелия на 0.014 и практически не меняет энтропию (уменьшает на 0.24%).
4. Предложен метод построения моделей с заданной скоростью звука в лучистой зоне. Показано, что в пределах множества моделей с классическим профилем химического состава модель с сейсмической скоростью звука имеет вполне определенные значения энтропии конвективной зоны и непрозрачности в лучистой зоне; обе величины при этом являются функциями содержания гелия во внешних слоях. Наилучшая модель (минимизация коррекции непрозрачности при правильном профиле скорости звука) довольно близка к стандартной модели с непрозрачностями Ливерморской группы и соответствует содержанию гелия во внешних слоях 0.28 (по массе) и энтропии конвективной зоны $S/R_{gas} = 20.82$ моль/г.
5. Рассчитано семейство моделей с профилем скорости звука в лучистой зоне, совпадающим с полученным гелиосейсмическим методом. Путем сравнения параметров спектра колебаний, характеризующих ядро Солнца, из него выбрана модель, наиболее полно удовлетворяющая современным гелиосейсмическим данным (сейсмическая модель Солнца).

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка цитируемой литературы.

Во *Введении* кратко обсуждается актуальность задачи, цели работы, научная новизна, научная и практическая значимость работы, приводится список работ, в которых опубликованы результаты диссертации.

В *Главе 1 "Стандартная модель Солнца: современные представления"* рассматриваются общие понятия теории внутреннего строения Солнца, приводятся уравнения строения и эволюции звезд применительно к Солнцу. Глава содержит обзор наблюдательной и теоретической гелиосейсмологии, нейтринной астрономии и работ в области моделирования внутреннего строения Солнца.

В *Главе 2 "Расчет солнечной модели с высокой точностью"* обсуждается необходимость достижения сравнительно высокой точности при расчете моделей Солнца, сравниваются методы интегрирования уравнений строения, рассматривается список трудностей, с которыми сталкиваются при расчетах. Обосновываются методы обеспечения заданной *a priori* точности, описываются алгоритмы и приемы, использованные в данной работе.

Глава 3 "Удельная энтропия вещества адиабатической части конвективной зоны" посвящена обсуждению роли энтропии вещества адиабатической части конвективной зоны в модели Солнца. Описывается деление модели Солнца на три зоны в соответствии с механизмами переноса и генерации энергии, аргументируется использование удельной энтропии как удобной характеристики конвективной зоны.

В *Главе 4 "Непрозрачность вещества и модель внутреннего строения Солнца"* рассматривается роль непрозрачности в солнечной модели. Обсуждаются история расчетов таблиц непрозрачности, модели с искусственно измененной непрозрачностью, связь между величиной и формой вариации непрозрачности и параметрами модели.

В *Главе 5 "Гелиосейсмическая модель Солнца"* рассматривается возможность расчета модели Солнца, которая согласовывалась бы с результатами гелиосейсмологии. Обсуждается гелиосейсмическая информация о Солнце, возможность подбора коррекции непрозрачности для получения нужных параметров модели, построение модели с заданным (гелиосейсмическим) профилем скорости звука, делается попытка определить свойства солнечного ядра и др.

В *Заключении* приводятся положения, выносимые на защиту.

Приложение содержит таблицы, описывающие эволюцию и внутреннее строение двух моделей Солнца – стандартной и наилучшим образом удовлетворяющей гелиосейсмическим данным.

Полный объем диссертации – 126 страниц; в ней содержится 27 рисунков. Список литературы насчитывает 166 наименований.

Апробация результатов и публикации

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

1. IAU Colloquium 137 "Inside the stars", 1992, Vienna, Austria.
2. Конференция памяти акад. А.Б. Северного, 1993, Крымская Астрофизическая обсерватория, Научный, Украина.
3. XXII General Assembly of the International Astronomical Union, 1994, The Hague, The Netherlands.
4. Всероссийская конференция по физике Солнца. 1995, Москва.
5. 8th European Meeting on Solar Physics. 1996, Thessaloniki, Greece.
6. "Solar Convection and Oscillations and their Relationship". 1996, Workshop held by Theoretical Astrophysics Center, Aarhus University, Aarhus, Denmark.
7. Семинары в Государственном Астрономическом Институте им. П.К. Штернберга, Объединенный семинар Queen Mary and Westfield College и Astronomy Institute of Cambridge University.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. V.A.Baturin, S.V.Ayukov "Helioseismic constraints on the structure of the present Sun." *Proceedings of IAU Colloquium 137*, 1992. A.S.P. Conf. Series, Vol. 40.
2. С.В.Аюков. "Стандартные модели Солнца с разными таблицами непрозрачностей". *Астрон. Цирк.*, 1994, N 1556.
3. В.А.Батурин, С.В.Аюков. "Влияние непрозрачности на параметры конвективной оболочки в солнечных моделях". *Астрон. ж.*, 1995, т. 72, 549.
4. В.А.Батурин, С.В.Аюков, "Солнечные модели с гелиосейсмическим профилем скорости звука". *Астрон. ж.*, 1996, т. 73, 259.
5. S.V. Ayukov, V.A. Baturin. "Solar models with helioseismologically correct sound speed profile". *Bull. Astr. Soc. India*, 1996, **24**, 329.

Личный вклад автора

Программа расчета моделей Солнца практически полностью написана автором; идеи и алгоритмы, примененные для повышения точности расчетов, обсуждались с В.А.Батуриным.

В работах, выполненных совместно с В.А.Батуриным, личный вклад состоит в расчете моделей Солнца, проведении анализа влияния непрозрачности на солнечную модель. Построение моделей с заданной скоростью звука выполнено совместно.

Глава 1.

Стандартная модель Солнца: современные представления

1.1. Общие представления о строении и эволюции Солнца

Внутреннее строение Солнца – на удивление интересный предмет исследований, т.к. он находится на стыке множества наук: физики плазмы, атомной физики, термодинамики, физики элементарных частиц, теории колебаний. С другой стороны, это означает, что изучение строения Солнца – весьма сложная задача.

С астрофизической точки зрения, Солнце – типичная звезда с очень точно известной массой, так что ее обычно принимают за единицу массы в астрофизике. Солнце – звезда класса G2 V, т.е. звезда главной последовательности на диаграмме Герцшпрунга-Рессела или, точнее, в середине стадии горения водорода. Эта стадия – первая фаза ядерного горения (она же самая длинная – 10^{10} лет). Ни для какой другой звезды мы не знаем столько же данных, сколько для Солнца: точно измерены масса и радиус Солнца; из теорий происхождения Солнечной системы и Земли мы знаем возраст Солнца с точностью примерно 5%. Эти данные вкупе с измерениями относительного содержания элементов в фотосфере, регистрацией солнечных нейтрино и наблюдениями поверхностных проявлений акустических волн, распространяющихся вглубь Солнца дают огромный объем информации о Солнце. Изучение же Солнца как типичной звезды позволяет лучше понять звездную эволюцию и другие области знания как, например, образование Вселенной (ограничение на первичное содержание гелия).

Моделирование внутреннего строения Солнца состоит в описании его эволюции от образования до настоящего времени, что может быть кратко выражено следующим алгоритмом:

1) $t = 0$: начало горения водорода; звезда имеет однородный химический состав, и он должен быть задан. Некоторые другие параметры также приходится выбирать *a priori*, т.к. они не определяются из наблюдений.

2) Решение уравнений строения (1.1–1.8); при этом необходимы также уравнение состояния (давление как функция плотности, температуры и химического состава

$P(\rho, T, X)$ и другие зависимости), коэффициент поглощения излучения (непрозрачность – $\kappa(\rho, T, X)$), скорость выделения энергии в ядерных реакциях ($\epsilon(\rho, T, X)$).

3) Расчет эволюции от момента t_i до $t_{i+1} = t_i + dt$, который есть не что иное как расчет изменения профиля химического состава X.

4) Повторять начиная с шага 2) пока t не достигнет $t_\odot$.

5) Если светимость и радиус модели совпадают с солнечными, задача выполнена, иначе изменить начальные параметры и вернуться к шагу 1).

При расчете модели Солнца неизбежно приходится делать некоторые предположения и упрощения. Со временем некий набор их стал достаточно общепринятым, и такая модель стала называется "стандартной" (standard model) или "опорной" (reference model). Эти положения можно найти в любом учебнике; ниже приведены основные:

а) Солнце находится в гидростатическом равновесии, т.е. в каждой точке объемные силы (гравитация) скомпенсированы поверхностными (газовое и лучистое давление);

б) вращением и магнитными полями можно пренебречь и, следовательно, звезда сферически симметрична вследствие самогравитации;

в) масса Солнца не изменялась в течение эволюции;

г) эволюция начинается от полностью однородной по химическому составу модели;

д) химический состав солнечного вещества изменяется в термоядерных реакциях превращения водорода в гелий; они же служат источником энергии Солнца;

е) перемешивание вещества происходит только в зоне переноса энергии путем конвекции;

ж) перенос энергии из энерговыделяющего ядра к излучающей поверхности либо лучистый (вычисляемый в диффузионном приближении), либо конвективный (только во внешних слоях звезды).

Другие предположения носят более частный характер; они описываются в главе 2.

1.2. Уравнения строения и эволюции; граничные условия

Внутренняя структура звезды описывается четырьмя уравнениями. Первое описывает гидростатическое равновесие (эволюционные изменения структуры звезды со временем достаточно медленны): каждый слой газа находится в равновесии под действием сил тяготения и разности давлений выше- и нижележащих слоев:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2}\rho; \tag{1.1}$$

здесь P – давление (газа и излучения), ρ – плотность, G – гравитационная постоянная, r – расстояние от центра Солнца до данного слоя газа. M_r – масса, заключенная внутри сферы радиуса r:

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi\rho r^2 \tag{1.2}$$

Энергия генерируется в термоядерных реакциях; необходимо также учитывать потери на нейтрино и процессы перераспределения гравитационной и тепловой энергии U с течением эволюции. Из закона сохранения энергии получаем:

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi\rho r^2 \left(\varepsilon - \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{P}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial t}\right). \tag{1.3}$$

Здесь ε – скорость выделения энергии (с учетом нейтринных потерь).

Энергия переносится из центра наружу. Процесс переноса может быть описан общей формулой для потока энергии:

$$F = \frac{L_r}{4\pi r^2} \tag{1.4}$$

$$F = K\frac{dT}{dr}; \tag{1.5}$$

здесь F – поток энергии, K – коэффициент теплопроводности. Этот коэффициент определяется механизмом переноса. В большей части звезды это лучистый перенос; он может быть описан диффузионным приближением (поскольку длина свободного пробега фотонов мала). Во внешних слоях, где коэффициент поглощения велик, плазма становится конвективно неустойчивой, и K определяется процессом конвекции. Выражение для производной температуры по радиусу можно также записать в другой форме:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{T}{P}\nabla\frac{dP}{dr}; \tag{1.6}$$

данное выражение тривиально, т.к. здесь

$$\nabla \equiv \frac{d\log T}{d\log P} \tag{1.7}$$

(т.наз. температурный градиент). Пользуясь (1.4) и (1.5),

$$\nabla = \frac{L_r P}{4\pi r^2 KT}\left(\frac{dP}{dr}\right)^{-1}. \tag{1.8}$$

Сама величина ∇ весьма часто употребляется. Отчасти это связано с критерием Шварцшильда: плазма конвективно неустойчива при

$$\nabla_{rad} > \nabla_{ad}, \tag{1.9}$$

где ∇_{rad} – градиент, рассчитанный для лучистого переноса:

$$\nabla = \frac{3L_r P\kappa}{16\pi acT^4 GM_r}. \tag{1.9}$$

Чтобы замкнуть эту систему, необходимо добавить функции $P = P(\rho, T, X)$, $U = U(\rho, T, X)$ (уравнение состояния), $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T, X)$ (источники энергии), $K = K(\rho, T, X, r, L_r)$ (перенос энергии; X – массовая доля водорода). Это физическое содержание задачи; ему посвящены последующие разделы этой главы. Заметим, что существует еще один параметр, здесь явно не указанный – массовая доля элементов тяжелее гелия Z; во всех рассматриваемых моделях $Z = 0.02$, что вызвано отсутствием термодинамических таблиц для других Z.

Так как термодинамические величины обычно представлены в виде функции температуры и плотности, а не давления, удобно использовать ρ вместо P в качестве неизвестной в системе уравнений (1.1–1.5). Тогда уравнение (1) заменяется на

$$\frac{d\rho}{dr} = \frac{\rho}{P}\chi_\rho^{-1}\left\{(1 - \chi_T\nabla)\frac{dP}{dr} - \chi_X\frac{P}{X}\frac{dX}{dr}\right\} \tag{1.10}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \chi_\rho &= (\partial \ln P/\partial \ln \rho)_{T,X} \\ \chi_T &= (\partial \ln P/\partial \ln T)_{\rho,X} \\ \chi_X &= (\partial \ln P/\partial \ln X)_{\rho,T} \end{aligned} \tag{1.11}$$

(заметим, что содержание водорода X “привязано” к массе, а не радиусу (предполагается отсутствие перемешивания), поэтому проще использовать производную X по массе или ее функции).

Систему (1.1–1.8) необходимо дополнить граничными условиями (их должно быть 4 по числу переменных: M_r – независимая переменная, давление может быть вычислено по ρ, T, X с помощью уравнения состояния, остаются r, ρ, T, L_r). Граничные условия в центре тривиальны:

$$M_r = 0 \quad : \qquad r = 0 \quad L_r = 0. \tag{1.12}$$

Граничные условия на поверхности Солнца более сложны и подробно описаны в §2.4.2; упрощенно их можно записать в виде:

$$M_r = M \quad : \qquad T = T_{surf} \quad \rho = \rho_{surf}. \tag{1.13}$$

(заметим, что $r = R$ и $L_r = L$ нельзя назвать граничными условиями, т.к. сами величины R и L получаются в результате решения задачи!)

1.3. Физика солнечных недр

Как упоминалось в §1.2, уравнения внутреннего строения должны быть дополнены соотношениями между термодинамическими величинами, т.е. уравнением состояния.

Непосредственно необходимо знание следующих зависимостей (X_i – химический состав вещества):

1. $P = P(\rho, T, X_i)$; часто это и называют уравнением состояния.
2. $U = U(\rho, T, X_i)$. Внутренняя энергия. Ее изменение должно учитываться при расчете эволюционного трека (см. §1.4 и уравнение 1.3).
3. $\chi_T \equiv (\partial \log P / \partial \log T)_{\rho, X_i}$, $\chi_\rho \equiv (\partial \log P / \partial \log \rho)_{T, X_i}$, $\chi_X \equiv (\partial \log P / \partial \log X)_{\rho, T}$ требуются для перехода от интегрирования давления к интегрированию плотности (см. уравнение 1.10).
4. $\xi_T \equiv (\partial \log U / \partial \log T)_{\rho, X_i}$ есть не что иное как замаскированная удельная теплоемкость при постоянном объеме; $\xi_\rho \equiv (\partial \log U / \partial \log \rho)_{T, X_i}$ используется при расчете энтропии (см. §3.2).

Расчет этих термодинамических функций и производных очень трудоемок. Это связано с необходимостью рассмотрения детального ионизационного равновесия минимум 5-10 элементов с почти сотней возможных степеней ионизации. Кроме уравнений ионизационного равновесия (уравнений Саха), необходимо учитывать и более тонкие эффекты, такие как электростатическое взаимодействие между атомами, электронами и ионами, т. наз. "ионизацию давлением" (раздавливание атомных оболочек при большой плотности) и частичное вырождение электронного газа.

В качестве описания термодинамики плазмы при расчете моделей всюду использовалось уравнение состояния, предложенное В.Даппеном, Д.Хаммером, Б.Михалас и Д.Михаласом; в дальнейшем MHD (Mihalas, Däppen and Hummer 1988, Hummer and Mihalas 1988, Däppen *et al.* 1988). Оно основано на детальном расчете состояний атомов и молекул и, по-видимому, является одним из наилучших на данный момент. MHD использует метод минимизации свободной энергии для вычисления термодинамических величин. Главное его отличие состоит в детальном учете статистических весов большого числа атомных, ионных и молекулярных состояний. В MHD использованы аналитические выражения для свободной энергии и ее первой и второй производных; это дает возможность получать термодинамические величины с высокой точностью и обеспечивает термодинамическую согласованность (выполнение термодинамических соотношений Максвелла).

Уравнение состояния MHD используется в виде таблиц: минимизация свободной энергии требует большого количества процессорного времени, и это не позволяет использовать непосредственные вычисления термодинамических величин в программах расчета звездной эволюции. Таблицы термодинамических величин имеются только для массовой доли элементов тяжелее гелия $Z = 0.02$, поэтому все представленные модели имеют фиксированное $Z = 0.02$; в рассмотрение включены C, N, O и Fe. Использованные в работе таблицы любезно предоставлены В. Даппеном. В целях сокращения объема таблиц и экономии памяти и процессорного времени они были пересчитаны на новую сетку. Шаг интерполяционной таблицы по логарифму температуры (десятичному) 0.025, по логарифму параметра $\rho/(T/10^6)^3$ – 0.05, по X (содержанию водорода) – 0.1. Таблицы хранятся в виде коэффициентов кубических сплайнов.

При расчете переноса энергии (лучистого или конвективного) необходимо знать коэффициент поглощения вещества κ. Эта часть физики задачи подробно обсуждается в главе 4.

Расчет выделения энергии и изменения химического состава вещества в процессе термоядерных реакций предполагает только превращение водорода в гелий (pp-цепочка и CNO-цикл). В уравнении (1.3) $\varepsilon(\rho, T, X)$ – скорость выделения энергии в процессе термоядерных реакций. Вообще говоря, ε зависит от концентраций множества ядер: ^1H, ^2H, ^3He, ^4He, ^7Be и т.д. Часть из них (^2H, ^7Li, ^7Be) с достаточной точностью можно всюду считать находящимися в кинетическом равновесии с остальными; часть лишь медленно сгорает или накапливается, нигде не находясь в равновесии (^1H, ^4He), и есть один класс, занимающий промежуточное положение (^3He, ^{13}C): концентрации этих ядер находятся в равновесии в самых внутренних частях звезды, но это не так в более внешних слоях. В случае Солнца главным из них является ^3He. В данной работе не учитывается накопление ^3He во внешних слоях энерговыделяющей зоны и концентрация ^3He принимается всюду равной равновесной. Как показано в Sackmann, Boothroyd and Fowler 1990, это вносит ошибку порядка 0.001 в содержание гелия. Скорость CNO-цикла принимается равной скорости самой медленной реакции в нем ($^{14}N(p,\gamma)^{15}O$)).

Для сечений реакций использованы значения из Caughlan, Fowler 1988. Сечения взаимодействия нейтрино с хлором и галлием взяты из Bahcall, Ulrich 1988.

Перенос энергии из энерговыделяющего ядра к излучающей поверхности происходит либо путем конвекции, либо путем фотонной теплопроводности (лучистый перенос, рассматриваемый в диффузионном приближении). Условием возникновения конвекции является критерий Шварцшильда: лучистый градиент температуры ∇_{rad} больше адиабатического ∇_{ad}. Граница конвективной зоны определяется как слой, на котором $\nabla_{rad} = \nabla_{ad}$. Описание переноса энергии при наличии конвекции следует Cox, Giuli 1968 (стандартная теория длины пути перемешивания, ТДПП). Отметим, что в атмосфере звезды длина свободного пробега фотонов сравнима с характерными размерами системы и диффузионное приближение неприменимо; там необходимо особое рассмотрение. Оно приводится в главе 2.

1.4 Расчет эволюционного трека

Согласно теореме Фогта-Рессела звезда (светимость, радиус, внутреннее строение) определяется массой и химическим составом. Так как масса Солнца в течение эволюции принята постоянной, расчет эволюции сводится к расчету изменения профиля химического состава. Вследствие изменения профиля химического состава изменяются светимость и радиус звезды. Мы имеем здесь краевую задачу по времени – модель должна иметь радиус и светимость, соответствующие современным наблюдаемым величинам, при возрасте, равном возрасту Солнца (4.75 млрд. лет в настоящей работе). Чтобы добиться этого, необходимо иметь два свободных параметра, значения которых подбираются для достижения этой цели; как обычно, в этом качестве выступают начальный химический состав (содержание водорода X) и параметр теории конвекции α.

Производные по времени содержатся также в "гравитационных членах" $\partial U/\partial t + (P/\rho^2)(\partial\rho/\partial t)$ в уравнении (1.3), описывающих изменение гравитационной и внутренней энергии звезды. В качестве начальных условий предполагается, что в момент времени $t = 0$ они равны нулю (звезда квазистационарна).

1.5. Успехи и проблемы последних лет

Попытки понять внутреннее строение начались еще в прошлом веке (Kelvin 1861, Kelvin 1887, Lane 1869, Ritter 1878, Ritter 1883, Emden 1907, Russell 1919), но началом современной теории должны считаться, по-видимому, 20-е годы этого века, когда была впервые высказана идея о том, что источником энергии для звезд служат ядерные реакции. В 1926 А. Эддингтон развил эту идею в своей книге (Eddington 1926), хотя он еще не понимал, какие именно ядерные реакции могут происходить в звездах. Аткинсон и Хоутерманс (d'Atkinson, Houtermans 1929) заметили, что при звездных температурах возможно преодоление потенциального барьера протона. В то же самое время Гамов получил формулу для вероятности туннельного эффекта (Gamow 1928), и Вейцзекер высказал мысль о возможности превращении водорода в гелий (von Weizsäcker 1937). Бете (Bethe, Critchfield 1938a, Bethe, Critchfield 1938b) предложил последовательности реакций, которые мы теперь называем $p - p$ цепочкой и CNO-циклом. После этого работы Чандрасекара (Chandrasekhar 1939) и Шварцшильда (Schwarzchild 1958) развили основные элементы теории почти в таком виде, в каком мы имеем их сейчас. В шестидесятых годах численные методы полностью вытеснили очень приблизительные аналитические; Хеньи (напр., Henyey, Forbes, Gould 1964) и Ибен (напр., Iben, Ehrman 1962) опубликовали множество работ по расчетам звездной эволюции.

Интересно, что в те же шестидесятые годы были открыты явления, которые сейчас служат в качестве зонда внутреннего строения Солнца: нейтрино и акустические колебания. Эксперимент по детектированию нейтрино был предложен в начале 60-х (Davis 1964) и реализован в 1967; первые результаты опубликованы в 1968 г. (Davis *et al.* 1968). Колебания поверхности Солнца были обнаружены в 1960 г. (Leighton 1960; Leighton, Noyes, Simon 1962), однако их природа была понята правильно лишь в конце 60-х (Ulrich 1969; Ulrich 1970; Leibacher, Stein 1971).

Наблюдения стимулировали дальнейший прогресс методов расчетов внутреннего строения. Одной из целей теоретиков стало воспроизведение тех данных о Солнце, что получаются из нейтринных экспериментов и измерений колебаний.

1.5.1 Солнечные нейтрино

Нейтринные детекторы показали, что поток нейтрино от Солнца может быть зарегистрирован и измерен. Предсказания солнечных моделей, однако, значительно разошлись с наблюдениями: поток, регистрируемый детектором на основе Cl^{37}, оказался примерно втрое ниже ожидаемого (Bahcall, Bahcall, Shaviv 1968). Этот детектор регистрировал нейтрино, возникающие в побочной ветви ядерных реакций. Большие надежды возлагались на проекты с Ga^{71} в качестве реагента, способные детектировать низкоэнергичные нейтрино, возникающие в основной ветви протон-протонного цикла. Два таких эксперимента были осуществлены: SAGE (Abdurashitov *et al.* 1994) и GALLEX (Anselmann *et al.* 1995), но ситуация стала немногим яснее: потоки низкоэнергичных нейтрино также оказались значительно ниже предсказываемых теорией. Kamiokande (Suzuki 1995), регистрирующий нейтрино более высоких энергий, также показал недостаток нейтрино. Три из этих экспериментов (хлорный, GALLEX и SAGE) – радиохимические и измеряют только число реакций в секунду, происходящих с нейтрино, имеющих энергию выше определенной. В Kamiokande регистрируются электроны, рассеянные при столкновениях с нейтрино, и было показано, что нейтрино действительно приходят от Солнца.

Для решения этой проблемы предлагалось множество гипотез (см., например, Bahcall, Ulrich 1988):

- перевод недр Солнца в другой температурный режим (перемешивание солнечных недр, ведущее к более высокому содержанию водорода; увеличенное содержание гелия в ядре в момент образования Солнца; пониженное содержание тяжелых элементов в ядре Солнца; наличие слабовзаимодействующих массивных частиц (WIMP), играющих роль в переносе энергии);
- ошибки ядерной физики (неверные сечения ядерных реакций или взаимодействия нейтрино с детекторами);
- ошибки в природе нейтрино (осцилляции нейтрино на пути от ядра Солнца к Земле).

Ни одна из них, однако, не признана решением проблемы. Некоторые из них (такие как WIMP и изменения сечений ядерных реакций) не находят подтверждения со стороны физики элементарных частиц; другие (разные виды модификаций химического состава) противоречат гелиосейсмическим данным. Нейтринные осцилляции могли бы служить хорошим решением проблемы, однако экспериментальных данных об их реальности пока нет, а чисто теоретические выводы недостаточно уверенны.

Новые эксперименты (SAGE и GALLEX) не решили проблему нехватки нейтрино; вместо этого, как было недавно отмечено (см., например, Bahcall, Krastev 1996), они перевели проблему в другую плоскость. Легко подсчитать, что светимость Солнца соответствует 73 ± 1 SNU для галлиевого детектора. Борные нейтрино, регистрируемые детектором Kamiokande, должны создавать поток около 7 SNU в галлиевом эксперименте. В то же время SAGE и GALLEX дают потоки 74 ± 8 SNU и, следовательно, бериллиевые нейтрино в этих экспериментах не регистрируются вовсе! Таким образом, измеренные потоки нейтрино оказались внутренне противоречивыми. В связи с этим в последнее время мнение теоретиков все больше склоняется к гипотезе нейтринных осцилляций (точнее, к тому, что решение проблемы следует искать в физике нейтрино, а не в теории внутреннего строения Солнца).

1.5.2 Наблюдения солнечных колебаний

В 1960 году были сделаны одни из самых важных открытий нашего столетия в гелиофизике: Leighton обнаружил супергрануляцию и пятиминутные колебания на Солнце (Leighton 1960; Leighton, Noyes, Simon 1962). Десятью годами позже Ulrich (Ulrich 1969; Ulrich 1970) предположил, что колебания поверхности есть не что иное, как результат интерференции между огромным числом собственных мод, захваченных в полости между солнечной поверхностью и сферой некоторого радиуса с центром в центре Солнца. Немного позже то же самое объяснение было предложено Stein и Leibacher (1974).

Первое доказательство существования собственных мод было получено Deubner в 1975 г. (Deubner 1975). Он получил первый двумерный спектр мощности, и его дискретность указывала на существование отдельных мод колебаний. В том же самом году Ando и Osaki опубликовали теоретическую двумерную частотную диаграмму. Она была немедленно сравнена с полученной Deubner (Ando, Osaki 1975; Ando, Osaki 1977), и согласие оказалось впечатляющим!

Fossat и Ricort тогда же впервые наблюдали осцилляции всего диска Солнца со скоростями порядка 1 м/с (Fossat, Ricort 1975). Несколько лет спустя, в 1979, Claverie, Isaak, Van der Raay и др. разрешили эти глобальные колебания на отдельные пики, что доказывало существование собственных мод с очень низкими степенями (Claverie *et al.* 1979; Claverie *et al.* 1980).

В 1980 г. Grec, Fossat и Pomerantz наблюдали колебания непрерывно в течении пяти дней (с географического Южного полюса) (Grec, Fossat, Pomerantz 1980; Grec, Fossat, Pomerantz 1983); результатом стало выделение отдельных собственных частот. В литературе стал появляться термин "гелиосейсмология". В следующем году Claverie, Isaak, Van der Raay и их коллеги получили серию наблюдений длиной в три месяца.

Их данные были дополнены измерениями на о. Тенериф и Гавайях, так что в целом период был покрыт на 80% (Claverie *et al.* 1981). Эти данные очень долго оставались непревзойденными среди измерений без пространственного разрешения.

В дальнейшем большая часть усилий была направлена на получение спектра мощности колебаний с пространственным разрешением. Несколько американских групп исследователей публиковали все более подробные и точные списки собственных частот: Duvall, Harvey 1983, Duvall *et al.* 1983, Rhodes *et al.* 1988, Libbrecht 1988; Libbrech, Woodard, Kaufman 1990.

Главный метод регистрации колебаний – наблюдения поля скоростей поверхности Солнца по доплеровскому сдвигу одной из линий поглощения в оптическом спектре. Наблюдаемые амплитуды колебаний весьма малы – от единиц до десятков сантиметров в секунду; для их точной регистрации применяются специальные методы измерения доплеровского сдвига (например, измерения в крыльях линий). Наблюдения интенсивности солнечного излучения также ведутся достаточно активно. При измерении интегрального потока излучения Солнца регистрируются относительные пульсации яркости порядка $10^{-5} - 10^{-6}$. Некоторые исследователи ведут наблюдения краев солнечного диска – измеряются флуктуации видимого диаметра или закона потемнения к краю.

Наблюдения ведутся с разной степенью пространственного разрешения. При наблюдении Солнца как звезды (без пространственного разрешения) получается высокое отношение сигнал/шум, но такие наблюдения ограничены колебаниями низких степеней $l \leq 3$. Для более высоких l вклад областей диска, колеблющихся в противофазе, взаимно компенсируется, и чувствительность наблюдений резко падает. Наблюдения с одномерным пространственным разрешением (приемник имеет вид линейки) дают возможность получать дисперсионные кривые в зависимости от горизонтального волнового числа или коэффициента сферической гармоники m. Зависимость частот от числа m определяется несферичностью фигуры Солнца, что позволяет изучать вращение и крупномасштабные магнитные поля. В последнее время наблюдения ведутся также с двойным пространственным разрешением; в этом случае колебания могут быть отождествлены по обоим индексам l и m.

В настоящее время наблюдения солнечных колебаний продолжаются с неменьшей интенсивностью. Поскольку одна обсерватория может наблюдать только полдня (когда Солнце над горизонтом), широкое распространение получают большие международные проекты. Существуют три пути получения непрерывных рядов данных.

Первый способ, наблюдения, проводимые за полярным кругом, был первым из использованных (Grec, Fossat, Pomerantz 1980; Grec, Fossat, Pomerantz 1983). Его преимущества в том, что наблюдения ведутся на одном инструменте, стоимость сравнительно невысока, и наблюдатель может непосредственно вмешиваться в течение измерений (в отличие от космических экспериментов). Главный недостаток – зависимость от погоды, и она обычно не позволяет получить рядов длиннее, чем в одну неделю. Наблюдения с Южного полюса все еще иногда проводятся.

Космический аппарат, наблюдающий Солнце без помех, мог бы быть идеальным местом для наблюдения колебаний без перерывов и атмосферных искажений. Недостатками здесь являются высокая стоимость, невозможность вмешательства в случае технических неполадок и, для наблюдений методом измерения доплеровского смещения, большие вариации лучевой скорости. Космические наблюдения особенно хорошо подходят для наблюдений колебаний низких l – наблюдать с пространственным разрешением с космического аппарата затруднительно, и колебания низких степеней как раз требуют длительных непрерывных рядов. Было выполнено несколько программ; две из них были достаточно удачными (в смысле качества полученных данных): американский инструмент ACRIM (Active Cavity Radiometer Irradiance Monitor) на спутнике SMM в 1980 (Wilson 1979; Woodard, Hudson 1983; Woodard, Noyes 1985; Woodard 1987) и шведский инструмент IPHIR (InterPlanetary Helioseismology by IRradiance measurements) на российском спутнике Фобос в 1988 (Frölich *et al.* 1988). В декабре 1995 года запущен европейский спутник SOHO, на котором находятся сразу три гелиосейсмологических инструмента: 1) GOLF (Global Oscillations at Low Frequency), который, как надеются исследователи, сможет обнаружить g-моды колебаний; инструмент измеряет лучевую скорость солнечного диска без пространственного разрешения (Gabriel *et al.* 1989); 2) VIRGO (Variability of Solar Irradiance and Gravity Oscillations) – цель та же, что и у GOLF (наблюдения колебаний низких степеней), но измеряются изменения яркости диска (Frölich *et al.* 1989); 3) MDI/SOI (Michelson Doppler Imager/Solar Oscillations Investigation) – измерения лучевой скорости с высоким пространственным разрешением; позволит получить частоты колебаний всех степеней, от 0 до 1000 (Scherrer *et al.* 1989). Результатов работы спутника пока нет, однако оборудование функционирует успешно. Многие исследователи возлагают на эти инструменты большие надежды.

Хорошей альтернативой космическим исследованиям успешно служат сети наземных станций. Их преимущества – более низкая стоимость по сравнению с космическими аппаратами и возможность вмешательства наблюдателя в процесс измерений. Недостатков, впрочем, также немало: из-за погоды покрытие временного интервала практически никогда не бывает 100%, использование нескольких инструментов порождает проблему их неизбежных различий, слияние данных с разных обсерваторий в один временной ряд является весьма сложной задачей. В настоящее время четыре больших сети находятся в разной стадии запуска. Исторически первой была сеть Бирмингемского Университета (BiSON – Birmingham Solar Oscillation Network). Первая станция (на о. Тенериф) заработала в 1975 году; в настоящее время функционируют 6 станций.

Инструменты измеряют доплеровское смещение света всего диска Солнца, и поэтому цель сети – наблюдения колебаний низких $l \leq 4$ (Elsworth *et al.* 1991). Группа опубликовала множество результатов; имена участников – A. Claverie, G.R. Isaak, C.P. McLeod, Y. Elsworth, R. Howe, R. New и др.

Сеть Университета г. Ниццы IRIS (International Research of the Interior of the Sun) в настоящее время насчитывает 6 станций. Данные накапливаются с 1990 года; инструменты измеряют лучевую скорость Солнца как звезды (без пространственного разрешения) (Fossat 1988). В последние годы, после ввода в строй станций в Узбекистане и Западном полушарии, группа опубликовала несколько интересных результатов, касающихся измерений расщепления частот мод колебаний и выводов относительно внутреннего вращения Солнца (Loudagh *et al.* 1992, Eghamberdiev *et al.* 1992, Fossat *et al.* 1995).

Сеть Университета тайваньского г. Цинь Хуа TON (Taiwanese Oscillation Network) – сравнительно молодой проект, однако он был запущен весьма удачно, и в настоящее время сеть начинает функционировать (Chou *et al.* 1995). Наблюдения ведутся с высоким пространственным разрешением по диску. Результаты наблюдений еще не опубликованы.

Масштабный проект GONG (Global Oscillation Network Group) начал свою деятельность в 1984 году (GONG 1984, Harvey *et al.* 1996), однако первые полномасштабные измерения были сделаны лишь в октябре 1995. На каждой станции установлен специально разработанный интерферометр Майкельсона измеряющий доплеровское смещение точек диска; наблюдения ведутся с высоким пространственным разрешением. Работают 6 станций; уже сейчас обширные ряды данных доступны для участников, и недавно началась публикация результатов (Harvey *et al.* 1996, Hill *et al.* 1996, Gough *et al.* 1996, Thompson *et al.* 1996, Hathaway *et al.* 1996).

1.5.3 Результаты гелиосейсмологии

Первым успехом теоретической гелиосейсмологии стало отождествление наблюдаемых и теоретических частот собственных мод колебаний. Были отождествлены тысячи частот, и это показало, что наше понимание физики колебаний близко к действительности. После этого, разумеется, исследователи стали сравнивать измеренные частоты с модельными более тщательно. Были разработаны адекватные методы сравнения (Christensen-Dalsgaard 1986), которые нормализовывали разности частот. На рис. 1.1 и 1.2 приводятся прямые (без нормализации) разности между двумя стандартными моделями (описанными в главе 4) и частотами колебаний из Libbrecht, Woodard, Kaufman 1990. Как видим, разности составляют от 10 до 20 μHz (около 0.5% от абсолютных величин частот). Это небольшая величина, но заметная, т.к. ошибки наблюдений на порядок меньше. Следовательно, эти разности представляют собой следствие ошибок в нашем понимании физики колебаний. Например, легко заметить общий наклон кривой для высоких частот. Поскольку моды высоких частот большей частью локализованы в поверхностных слоях, это указывает на неточности в модели атмосферы и сверхадиабатической части конвективной зоны (или в физике распространения акустических волн в этих слоях).

Частоты колебаний определяются главным образом профилем скорости звука в недрах Солнца. Открытие закона Дюваля (Duvall 1982; дисперсионное соотношение, связывающее скорость звука в модели и параметры частот) подтолкнуло теоретиков к попыткам получить скорость звука, основываясь на частотах колебаний.

Существуют два подхода к получению профиля скорости звука из набора наблюдаемых частот (в англоязычной литературе используется термин "inversion", в русскоязычной – "восстановление"). В первом методе ("асимптотическая инверсия") колебания описываются с помощью асимптотической теории. При этом возможно получить скорость звука непосредственно из теории колебаний, не прибегая к какой-либо модели Солнца. За эту возможность приходится платить тем, что асимптотическое описание колебаний содержит достаточно грубые предположения. Тем не менее большинство работ используют этот метод (в т.ч. первое определение профиля скорости звука – Christensen-Dalsgaard *et al.* 1985).

Второй метод решения обратной задачи восстановления профиля скорости звука основан на использовании базовой модели Солнца: уравнения для разностей частот моделей линеаризуются и затем рассчитываются поправки к модельной скорости звука. В отличие от асимптотического метода, этот подход использует точные (впрочем, линеаризованные и в адиабатическом приближении) уравнения колебаний. Недостаток его состоит в том, что выбор базовой модели влияет на результат: при неудачной базовой модели разности будут слишком велики.

Первое восстановление профиля скорости звука было сделано в 1985 г. группой J. Christensen-Dalsgaard, T.L. Duvall, Jr., D.O. Gough, J.W. Harvey и E.J. Rhodes, Jr. Профиль скорости звука удалось восстановить примерно до $0.2R_\odot$; центр Солнца нельзя было исследовать из-за недостаточной точности частот низких степеней. В последующие годы было выполнено множество работ на эту тему; подробные библиографии приведены в Воронцов, Жарков 1988 и Vorontsov, Shibahashi 1991. Из более поздних работ необходимо отметить Gough, Kosovichev 1993; Antia, Basu 1994; Dziembowski, Goode, Pamyatnykh, Sienkiewicz 1994.

На основании профиля скорости звука можно оценить положение нижней границы конвективной зоны (положение точки разрыва второй производной, т.е. производной

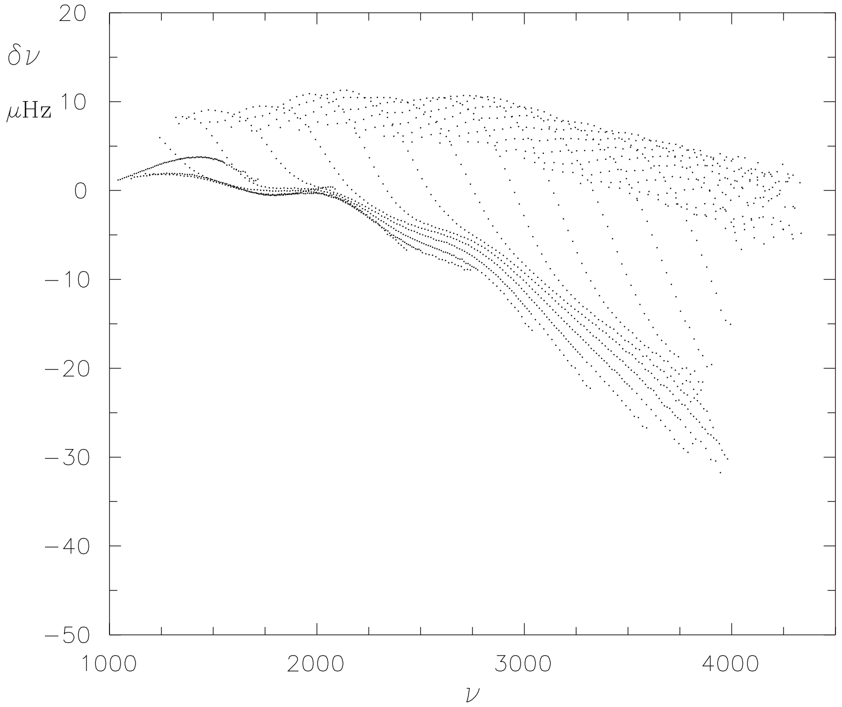

Рис. 1.1. Разности $\delta\nu$ между наблюдениями (Libbrech, Woodard, Kaufman 1990) и рассчитанными частотами для модели 350-0106 (таблицы непрозрачностей WKM, т.е. LAOL).

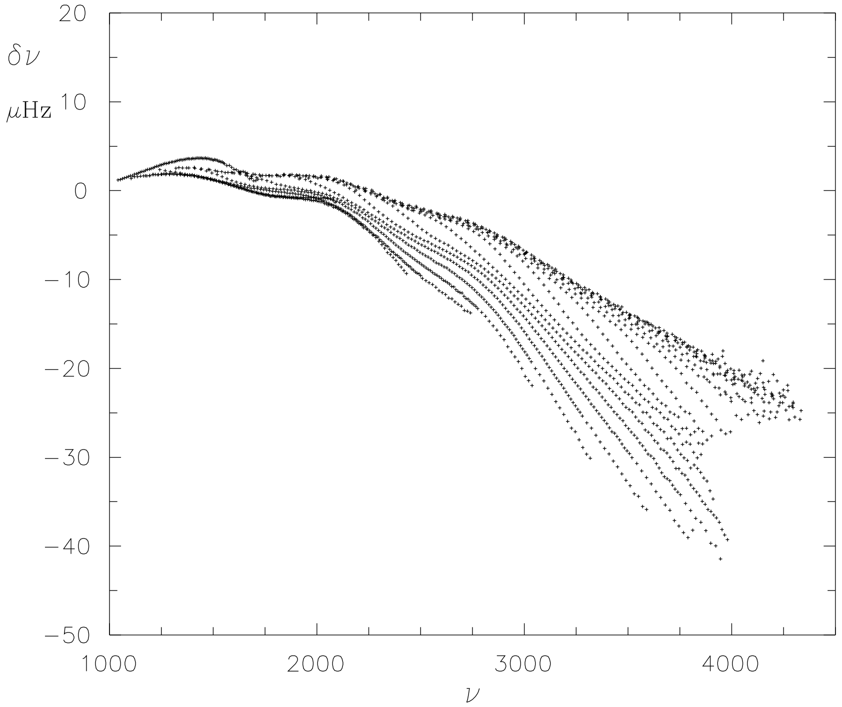

Рис. 1.2. Разности $\delta\nu$ между наблюдениями (Libbrech, Woodard, Kaufman 1990) и рассчитанными частотами для модели 350-0105 (таблицы непрозрачностей IR91, т.е. OPAL).

градиента температуры). Однако более точные оценки положения этой точки получены на основе модельной калибровки, то есть из условия согласования специфически выбранных модельных частот с наблюдаемыми.

Первые оценки глубины конвективной зоны (H_{cz}) были сделаны довольно давно. В 1977 г. Gough, используя упрощенное описание колебаний, вывел, что конвективная зона должна быть примерно на 50% глубже, чем в модели Ando, Osaki 1975, т.е. около $0.3R_{\odot}$. Lubow, Rhodes, Ulrich (1980) и Berthomieu *et al.* 1980 изучали чувствительность частот колебаний к неопределенностям физики конвективной зоны и нашли $H_{cz} \approx 0.3R_{\odot}$. Во всех этих случаях анализировались только моды высоких степеней. Эти собственные моды захвачены в самых верхних слоях конвективной зоны и не проникают до ее дна. По сути, по наблюдаемым частотам определялась удельная энтропия вещества адиабатической части конвективной зоны (см. гл. 3), которая затем использовалась для оценки глубины путем расчета моделей внутреннего строения. В 1986 г. Gough указал, что излом градиента скорости звука на границе конвективной зоны может быть использован для гораздо более точного и независимого определения H_{cz}. На рисунке, приведенном в Christensen-Dalsgaard *et al.* 1985, этот излом был отчетливо виден, и находился между 0.71 и 0.72. Воронцов применил тот же подход к полученному им профилю скорости звука и нашел $H_{cz} = 0.70 \pm 0.01$; методика была подробно описана в Воронцов, Жарков 1988. Позже Christensen-Dalsgaard, Gough, Thompson (1991), основываясь на одном из лучших современных наборов наблюдательных частот (Libbrecht, Woodard, Kaufman 1990), произвели детальное исследование вопроса и получили $H_{cz} = 0.287 \pm 0.003$. В работе Vorontsov, Shibahashi 1991 этот результат был подтвержден: 0.290 ± 0.005.

В 1984 году Gough (1984) высказал следующую идею: скорость звука зависит от термодинамического показателя Γ_1, а он, свою очередь, зависит от химического состава вещества. Следовательно, зоны частичной ионизации гелия влияют на профиль скорости звука и на частоты p-мод. Эту информацию можно использовать для определения относительного содержания гелия в конвективной зоне (где гелий претерпевает первую и вторую ионизации). Däppen и Gough (1986) предложили процедуру для оценки содержания гелия, однако качество наблюдательного материала оказалось недостаточно высоким (производная профиля скорости звука содержала большие шумы). Позже Däppen, Gough и Thompson (1988) применили несколько другой метод выделения скорости звука, и показали на искусственных данных, что метод работоспособен. Реальной оценки, однако, получено не было (отчасти из-за недостаточной точности наблюдательных частот, отчасти из-за неопределенностей в уравнении состояния, которое сильно влияет на результат). В 1990 г. Dziembowski, Pamyatnykh и Sienkiewicz, используя другую методику (расчет наборов моделей Солнца с разными Y и сравнение модельных частот

Работа	Содержание гелия Y
Antia, Basu 1994	0.252 ± 0.003
Perez Hernandez, Christensen-Dalsgaard, 1994	0.242 ± 0.003
Basu, Antia 1995	0.246
Baturin, Vorontsov 1995	0.25 ± 0.08
Kosovichev, 1995	0.232 ± 0.006
Dziembowski *et al.* , 1995	0.244 ± 0.003

Таблица 1.1. Работы последних лет по определению содержания гелия в конвективной зоне методами гелиосейсмологии

с наблюдаемыми) получили $Y = 0.235 \pm 0.005$. Vorontsov, Baturin, Pamyatnykh 1991 использовали фазовую калибровку и получили $Y = 0.25 \pm 0.01$. Christensen-Dalsgaard and Perez Hernandes 1991, сравнивая масштабированные разности частот, нашли $Y \approx 0.25$.

В последнее время результаты большинства авторов близки к 0.25. Таблица 1.1 содержит краткую сводку результатов.

Все они, заметим, получены с использованием уравнения состояния MHD. Поскольку определение содержания гелия основано фактически на вкладе ионизованного He в показатель адиабаты, погрешности в уравнении состояния неизбежно отражаются в получаемой величине Y.

1.5.4 Моделирование внутреннего строения Солнца

Программы для расчета эволюции Солнца и звезд были разработаны в основном в 60-е и 70-е годы, когда компьютеры стали входить в число инструментов теоретиков. В то время программы были разработаны Iben (1965), Paczynski (1969, 1970) и Kippenhahn (Kippenhahn, Weigert, Hofmeister 1967). Для расчетов обычно использовался метод Henyey (Henyey, Forbes, Gould 1964).

Впрочем, эти программы больше подходили для изучения эволюции звезд чем Солнца. С одной стороны, они включали описание явлений и процессов, на Солнце не встречающихся (таких как горение гелия или конвективное ядро); с другой стороны, их точность была невысока (для расчетов звездной эволюции она адекватна, но характеристики Солнца мы знаем гораздо лучше). Поэтому в 80-е годы произошел постепенный переход: модели Солнца стали рассчитывать с помощью специально написанных для этого программ, концентрируя внимание на том, чтобы модели были основаны на возможно более точном описании физических процессов (уравнение состояния, ядерные реакции, перенос энергии и т.д.) Отчасти это было стимулировано проблемой нейтрино; долгое время казалось, что небольшие изменения модели (в пределах ошибок, скажем, современных сечений ядерных реакций) могут достичь цели, т.е. уменьшить ожидаемый поток до величины регистрируемого. Поток нейтрино чрезвычайно чувствителен к центральной температуре, и чтобы получить имеющие смысл результаты, необходимо заботиться о точности расчетов.

В 90-х годах к этому добавилось еще одно требование: модель Солнца должна обладать достаточной точностью для расчета собственных частот колебаний. В отличие от нейтрино, акустические волны распространяются по всему объему Солнца, причем большую часть времени они проводят в конвективной оболочке. Таким образом, современная модель внутреннего строения Солнца должна обладать равномерной точностью по всему диапазону радиуса – от центра до поверхности.

В таблице 1.2 приведена сводка стандартных моделей Солнца, рассчитанных с 1988 года до настоящего времени. Необходимо отметить, что эта таблица не может служить исчерпывающим источником информации об упомянутых в ней работах; на самом деле расчеты разных авторов отличаются множеством деталей, иногда второстепенных, иногда весьма важных по сравнению с требуемым уровнем точности.

Обширная статья Bahcall, Ulrich 1988 содержит исследование неопределенностей в солнечной физике и обсуждение возможных путей решения проблемы нейтрино. К сожалению, выводы о пределах достоверности ожидаемых значений потоков нейтрино несколько ограничены, что, впрочем, неизбежно при столь всеобъемлющем исследовании. Программа расчета эволюции довольно стара и, по-видимому, не столь точна как более современные.

Работа Turck-Chiéze *et al.* 1988 концентрируется на двух моментах: 1) получение как можно более точных предсказаний потока нейтрино (с учетом возможных ошибок в сечениях ядерных реакций) и 2) анализе стандартных моделей Солнца тех лет (1983-1988 гг.) При изучении второго вопроса применен оригинальный подход: авторы выбрали несколько работ середины 80-х, рассчитали стандартные модели Солнца с теми же входными данными (непрозрачностями, сечениями реакций и т.д.) что и у независимых авторов и сравнили результаты. В результате сравнения выяснилось, что в подавляющем большинстве случаев программа Turck-Chiéze *et al.* 1988 и автора оригинальной статьи дала очень близкие результаты (сравнивались в основном потоки нейтрино и начальное содержание гелия). Это показало, что программы различных авторов хорошо согласуются по рассмотренным параметрам, соответствующем глобальным характеристикам Солнца. К сожалению, сравнить точность моделей на уровне расчетов собственных частот колебаний не было возможности. Работа Turck-Chiéze, Lopes 1993 продолжает это исследование, подтверждая и уточняя прежние результаты.

Статья Sackmann, Boothroyd, Fowler 1990 посвящена главным образом изучению влияния различных параметров на модель: исследуются ошибки в трактовке ионизации давлением, светимости, содержании элементов тяжелее гелия, возрасте Солнца,

Работа	Y	Z	H_b/R	α	T_c	ρ_c	$F_{Cl^{37}}$	$F_{Ga^{71}}$	EOS	Непр.
BU88	0.2706	0.0196	0.260		15.6	148	7.9	132		LAOL
TCCD88	0.276	0.0197	0.270	2.11	15.51	147.7	5.8	124.8		LAOL
LD88	0.278	0.0198	0.260	2.16	15.54	148	7.6	126.9		LAOL
CGK89	0.291	0.02	0.286	1.894	15.68	162.4	11.4			LAOL
SBF90	0.2783	0.01943	0.260	2.1	15.43	146.6	7.68			LAOL
GC91	0.270	0.02	0.296	2.291	15.40	161.4	8.5	144	MHD	LAOL
KDG91	0.2843		0.2604	1.242						LAOL
	0.2736		0.2645	1.256					MHD	LAOL
GDKP92	0.2875	0.0188	0.255	1.1949	15.346	146.55				LAOL
	0.2736	0.02	0.266	1.2559	15.417	144.2			MHD	LAOL
BP92	0.2716	0.01895	0.279		15.59	151.3	7.2	127		
JCD92	0.2806	0.02	0.2712	2.5167	15.685		8.89	134.3	EFF	LAOL
FS92	0.3037	0.02	0.263	1.669	15.772					OPAL
BPML93	0.275	0.0194	0.279	1.90	15.55	151.9	7.43	127.7	CEFF	OPAL
DGPS94	0.2827	0.02	0.2844		15.713	150.6	8.22		MHD	OPAL
GC95	0.287	0.02	0.280	1.88					MHD	LAOL
CDGP95	0.2708	0.01880	0.2812	1.975	15.523	149.52	6.69	124		OPAL

Таблица 1.2. Работы последних лет в области моделирования Солнца. Использованные сокращения: BU88 – Bahcall, Ulrich 1988; TCCD88 – Turck-Chiéze et al. 1988; LD88 – Lebreton, Däppen 1988; CGK89 – Cox, Guzik, Kidman 1989; SBF90 – Sackmann, Boothroyd, Fowler 1990; GC91 – Guzik, Cox 1991; KDG91 – Kim, Demarque, Guenther 1991; GDKP92 – Guenther et al. 1992; BP92 – Bahcall, Pinsonneault 1992; BPML93 – Berthomieu et al. 1993; JCD92 – Christensen-Dalsgaard 1992; FS92 – Faulkner, Swenson 1992; DGPS94 – Dziembowski et al. 1994; GC95 – Guzik, Cox 1995; CDGP95 – Chaboyer, Demarque, Guenther, Pinnsonneault 1995.

Y – начальное содержание гелия (по массе); Z – содержание тяжелых элементов (по массе); H_b/R – глубина конвективной зоны, в радиусах Солнца; α – параметр теории конвекции; T_c, ρ_c – температура и плотность в центре Солнца; $F_{Cl^{37}}$, $F_{Ga^{71}}$ – ожидаемые потоки нейтрино для детекторов на основе Cl^{37} и Ga^{71}; EOS – уравнение состояния; Непр. – тип таблиц непрозрачности (см. более подробно гл. 4).

MHD – уравнение состояния Mihalas, Hummer, Däppen (см. §1.3); EFF – уравнение состояния, описанное в статье Eggleton, Faulkner, Flannery 1973; CEFF – модифицированный вариант EFF (добавлена поправка за кулоновское взаимодействие ионов, ядер и электронов).

непрозрачности в атмосфере. Авторы рассчитывают модели, изменяя эти величины и сравнивая результат со стандартной моделью Солнца. Приводится также обзор моделей 1986-89 гг.

В работе Guzik, Cox 1991 изучается влияние непрозрачности и уравнения состояния на частоты колебаний Солнца. Отмечается, что использование уравнения состояния MHD по сравнению с аналитическим уравнением Iben улучшает согласие частот с наблюдаемыми; также подтверждается то, что точность современных таблиц непрозрачности недостаточна для гелиосейсмологических исследований.

Работы Kim, Demarque, Guenther 1991 и Guenther *et al.* 1992 рассматривают методы достижения согласования теоретических и наблюдаемых частот колебаний путем введения в модель самых последних достижений физики плазмы (на то время – уравнения состояния MHD, таблиц непрозрачностей OPAL). Попутно изучается эффект от использования таблиц непрозрачностей с учетом молекул для низких температур ($\lg T < 5$); подтверждается, что увеличение непрозрачности в атмосфере Солнца ведет к значительному улучшению согласования частот (факт, отмеченный еще в 1985 году (Christensen-Dalsgaard *et al.* 1985)).

Работа Bahcall, Pinsonneault 1992 посвящена расчетам моделей с диффузией гелия. Отмечается, что ее введение привело к некоторому росту ожидаемых потоков нейтрино, уменьшению глубины конвективной зоны примерно на 2% и падению содержания гелия в конвективной зоне с 0.2716 до 0.2466. Последнее является весьма значительной величиной. Сходные результаты получены в работах Christensen-Dalsgaard, Proffitt, Thompson 1993; Guzik, Cox 1995; Chaboyer, Demarque, Pinsonneault 1995; Chaboyer, Demarque, Guenther, Pinsonneault 1995. В целом влияние диффузии на содержание гелия сводится к его уменьшению в конвективной зоне на 0.02-0.03 (по массе); этот избыток гелия равномерно распределяется по остальной части модели. В настоящее время этот процесс рассматривается как наиболее вероятный кандидат на решение проблемы с избытком гелия в стандартных моделях по сравнению с гелиосейсмическими данными (ср. табл. 1.1 и 1.2, см. также §5.3.2).

В работе Christensen-Dalsgaard, 1992 изучаются модели с искусственно пониженными непрозрачностями в ядре Солнца (имитация WIMP). Такие модели имеют пониженную температуру в центре и, вследствие этого, низкий поток нейтрино. Модели из этой работы нанесены на рис. 4.4; эффект этой модификации непрозрачности легко объясняется в рамках данной диссертационной работы. В статье отмечается также, что понижение непрозрачности в ядре несовместимо с наблюдаемыми частотами колебаний низких степеней.

Faulkner, Swenson (1992) рассчитывают модели с новыми (в то время) таблицами непрозрачностей OPAL. Статья обсуждает главным образом глубину конвективной зоны и возможность выгорания Li^7 в ядерных реакциях (при достаточно глубокой конвективной зоне).

Работа Berthomieu, Provost, Morel, Lebreton 1993 описывает стандартные модели, рассчитанные с помощью разработанной P.Morel высокоточной программы. Отмечается факт постепенного сближения результатов разных групп исследователей в последние годы, вызванный повышением точности расчетов и большей стандартизацией физических основ моделей.

В 1994-1996 гг. появились работы, пытающиеся получить модель целиком из гелиосейсмических данных – настолько возросли объем и качество информации о собственных частотах колебаний. Dziembowski, Goode, Pamyatnykh, Sienkiewicz (1994) считают, что ошибка профиля скорости звука не превышает 10^{-3} (при $r/R > 0.05$ – 10^{-2}), а точность определения плотности и давления немногим меньше. Этих данных достаточно, чтобы воспроизвести внутреннюю структуру модели почти полностью; авторы отмечают, что разности между их стандартной и гелиосейсмической моделями невелики, но значимы. В самой внутренней части ядра Солнца они не могут быть устранены путем незначительных уточнений модели. В следующей работе (Dziembowski, Goode, Pamyatnykh, Sienkiewicz 1995) сейсмическая модель уточнена с использованием данных BISON (Elsworth *et al.* 1994); совпадение со стандартной моделью улучшилось (авторы также полностью отвергают возможность решения проблемы нейтрино в рамках задачи о моделировании Солнца).

С 1982 года J.Christensen-Dalsgaard рассчитывает модели Солнца и их спектр собственных колебаний (Christensen-Dalsgaard, 1982; Christensen-Dalsgaard, 1992; Christensen-Dalsgaard *et al.* 1996 и др.) Многие его работы стали классическими; модель 1982 года вследствие своей подробности и математической согласованности широко использовалась при решении задач гелиосейсмологии. Недавно J.Christensen-Dalsgaard предложил новую "эталонную" модель, рассчитанную с последними достижениями физики плазмы; она доступна всем желающим для использования.

Глава 2.

Расчет солнечной модели с высокой точностью

Как уже отмечалось в главе 1, задача расчета модели современного Солнца сводится к решению нескольких вложенных краевых задач. Начнем с самой внешней из них: калибровки эволюционного трека.

Чтобы рассчитать эволюционный трек (и стандартную модель современного Солнца), необходимо знать массу, химический состав начальной модели и возраст Солнца, т.е. длину эволюционного трека. При знании физики всех процессов, составляющих эволюцию Солнца, этих трех величин достаточно для расчета солнечной модели. Однако химический состав начальной модели нам неизвестен (оценки на основе измерений современного содержания гелия в поверхностных слоях Солнца крайне неуверенны); кроме того, мы также не знаем деталей конвективного переноса энергии из-за феноменологического характера самой теории конвекции (параметра теории длины пути перемешивания (ТДПП) в нашем случае; см. Cox, Giuli 1968). Это дает две степени свободы (т.е. два параметра из входных данных превращаются в результат решения задачи). Таким образом, на сегодня эволюционное моделирование остается главным методом определения начального содержания гелия Y на Солнце.

Массу Солнца считаем неизменной в течение эволюции, и возраст принято оценивать по возрасту старейших образцов метеоритов. Начальную модель (с возрастом $t = 0$, т. наз. Zero-Age Main Sequence model – ZAMS) считаем химически однородной. Эволюционные изменения происходят вследствие выгорания водорода (превращения в гелий), содержание элементов тяжелее гелия Z считаем неизменным. Выбрав некие значения для начального содержания водорода X и параметра теории конвекции α, получим некую модель с нужным возрастом. Очевидно, светимость и радиус ее не будут совпадать с наблюдаемыми значениями для современного Солнца. Но поскольку у нас есть два свободных параметра (X и α), их можно подбирать для достижения нужных значений светимости и радиуса при $t = t_{\odot}$. Это составляет сущность эволюционной калибровки. Заметим, что при этом параметр теории конвекции считается неизменным в течение эволюции, что, в общем, не имеет под собой какого-либо основания, т.к. светимость и радиус Солнца в процессе эволюции заметно изменяются.

В процессе расчета трека необходимо в каждой точке иметь модель Солнца, чтобы определить скорость выгорания водорода в каждой точке радиуса модели. При этом известен профиль химического состава вдоль радиуса, что позволяет рассчитать квазистатическую модель (эволюционные изменения, происходящие в ядерной шкале времени, гораздо более медленны по сравнению с временем установления равновесия (тепловая шкала времени)). Согласно теореме Фогта-Рассела, химического состава и массы достаточно для расчета модели звезды. Для уравнений строения (1.1–1.8) у нас есть два граничных условия в центре (1.12) и два на поверхности (1.13; см. также §2.4.2) – это вторая граничная задача.

Таким образом, расчет модели современного Солнца сводится к 1) выбору начального содержания гелия Y и параметра теории конвекции α; 2) расчету последовательности моделей Солнца от $t = 0$ до $t = t_\odot$; 3) корректировке Y и α для получения правильных значений современных радиуса и светимости.

Приведем данные о Солнце и физические константы, использованные при расчете моделей:

$$\begin{aligned}
* \text{ Постоянная Планка } h &= 6.6260755 \cdot 10^{-27} \text{ эрг·с} \\
* \text{ Атомная единица массы } m_u &= 1.6605402 \cdot 10^{-24} \text{ г} \\
* \text{ Скорость света } c &= 2.99792458 \cdot 10^{10} \text{ см/с} \\
* \text{ Постоянная Больцмана } k &= 1.380658 \cdot 10^{-16} \text{ эрг/К} \\
* \text{ Масса электрона } m_e &= 9.1093897 \cdot 10^{-28} \text{ г} \\
* \text{ Заряд электрона } e &= 4.80320680 \cdot 10^{-10} \text{ ед. СГСЭ} \\
* \text{ Пересчет эрг} \to \text{eV } &= 1.60217733 \cdot 10^{-12} \text{ эрг/eV} \\
\text{Гравитационная постоянная } G &= 6.672320 \cdot 10^{-8} \text{дин} \cdot \text{см}^2/\text{г}^2 \\
\dagger \text{ Продолжительность года } &= 31556926 \text{ с} \\
\dagger \text{ Масса Солнца } M_\odot &= 1.989 \cdot 10^{33} \text{ г} \\
\dagger \text{ Радиус Солнца } R_\odot &= 6.9599 \cdot 10^{10} \text{ см} \\
\text{Светимость Солнца } L_\odot &= 3.846 \cdot 10^{33} \text{ эрг/с} \\
\text{Возраст Солнца } t_\odot &= 4.75 \text{ млрд. лет}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Большинство из них были предложены в Christensen-Dalsgaard 1988. Значения, помеченные $*$, взяты из Cohen, Taylor 1987. Знак † соответствует справочнику Allen 1973. Светимость Солнца приведена по результатам Wilson *et al.* 1986. Значения гравитационной постоянной и возраста Солнца были предложены в Christensen-Dalsgaard 1988; первое основано на хорошо известном из астрометрии произведении GM и общепринятом значении массы Солнца. Для возраста Солнца в настоящее время обычно используется меньшее значение (4.6 или даже 4.55 млрд. лет – см. работы по расчету строения Солнца последних лет).

2.1. Методы расчета солнечной модели

Существуют несколько методов решения краевой задачи (1.1–1.8, 1.12–1.13). Один из них в применении к моделям звезд был описан, по-видимому, М. Шварцшильдом (1958) и обычно называется методом сшивки (в русскоязычной математической литературе его называют методом "стрельбы" или "пристрелки"). При этом берутся некие начальные значения для отсутствующих граничных условий в центре и на поверхности; затем уравнения строения интегрируются из центра и от поверхности до некоторой точки внутри звезды, называемой точкой сшивки. Ниже, в §2.4, будет показано, почему нежелательно интегрировать от центра до поверхности или наоборот – это приводит к росту численных ошибок и, соответственно, увеличению требуемого числа шагов интегрирования.

Значения основных структурных переменных (плотности ρ, доли радиуса r, температуры T, доли светимости L_r внутри сферы радиуса r) в точке сшивки, полученные из интегрирования оболочки и ядра, естественно, не совпадают, т.к. часть граничных условий выбрана произвольно. Далее мы вносим небольшие изменения в каждое неизвестное граничное условие по очереди и оцениваем производные

$$\begin{gathered}
\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial T_c}\right)_{fit} \left(\frac{\partial r_1}{\partial T_c}\right)_{fit} \left(\frac{\partial T_1}{\partial T_c}\right)_{fit} \left(\frac{\partial L_{r1}}{\partial T_c}\right)_{fit} \\
\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial \rho_c}\right)_{fit} \left(\frac{\partial r_1}{\partial \rho_c}\right)_{fit} \left(\frac{\partial T_1}{\partial \rho_c}\right)_{fit} \left(\frac{\partial L_{r1}}{\partial \rho_c}\right)_{fit} \\
\left(\frac{\partial\rho_2}{\partial L}\right)_{fit} \left(\frac{\partial r_2}{\partial L}\right)_{fit} \left(\frac{\partial T_2}{\partial L}\right)_{fit} \left(\frac{\partial L_{r2}}{\partial L}\right)_{fit} \\
\left(\frac{\partial\rho_2}{\partial R}\right)_{fit} \left(\frac{\partial r_2}{\partial R}\right)_{fit} \left(\frac{\partial T_2}{\partial R}\right)_{fit} \left(\frac{\partial L_{r2}}{\partial R}\right)_{fit}
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Индексами $_1$, $_2$ обозначены значения в точке сшивки, полученные интегрированием соответственно ядра и оболочки. С помощью этих производных корректируем граничные условия так, чтобы добиться совпадения

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \rho_2 \qquad & r_1 &= r_2 \\
T_1 &= T_2 \qquad & L_{r1} &= L_{r2}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

в точке сшивки с заданной точностью (см. §2.4).

Из недостатков этого метода следует отметить особенно большой объем вычислений (в частности, необходима оценка производных (2.2)). Однако он обладает несомненными преимуществами:

1) возможен контроль точности на каждом шаге интегрирования уравнений;

2) сетка интегрирования (шаг по массе) выбирается не статически, а динамически в процессе интегрирования, что позволяет а) легко выдавать значения в нужных точках, б) уменьшить погрешность метода в точке излома производной температуры на дне конвективной зоны (см. §2.3).

3) само интегрирование уравнений может производиться быстрыми методами высокого порядка;

4) требования к оперативной памяти невысоки.

Второй метод расчета модели звезды широко используется в расчетах эволюции звезд (не Солнца). Он был подробно описан в работах Хеньи и др. (см., например, Henyey, Vardya, Bodenheimer 1965) и называется методом разностных схем. Звезда разбивается на несколько сотен зон (сетка интегрирования), и в каждой точке границы уравнения строения переписываются в разностной форме. По сути интегрирование дифференциальных уравнений заменяется решением системы разностных уравнений. Затем "методом релаксации" находят неизвестные граничные условия. Преимущество метода – в быстроте работы. Недостатки:

1) низкий порядок метода (почти всегда второй) – необходимо большое число зон;

2) большие требования к оперативной памяти – необходимо хранить значения переменных и производных в узлах сетки;

3) неудобство коррекции разбиения на зоны в процессе релаксации (проблемы с разрывом второй производной температуры на дне конвективной зоны).

Существуют также другие методы, не получившие еще широкого распространения. Из них особенно перспективным выглядит метод коллокационных сплайнов Мореля и др. (Morel *et al.* 1992), сочетающий в себе простоту и скорость разностных схем и мощь и удобство методов интегрирования высокого порядка.

В нашей программе используется метод сшивки – отчасти в силу его очевидных преимуществ, отчасти в силу исторических причин (отсутствие компьютеров с достаточным объемом оперативной памяти на ранней стадии разработки).

2.2. Необходимость достижения высокой точности

Казалось бы, зачем рассчитывать модели с высокой степенью точности? Разве мы знаем сечения ядерных реакций или возраст Солнца с точностью 10^{-4}?

Да, действительно, большая часть данных о Солнце имеет довольно низкую точность. Положение с физикой солнечных недр немногим лучше, а в некоторых случаях и хуже, так что вопрос о расчете модели Солнца с погрешностью 10^{-5} может показаться бессмысленным. Тем не менее необходимость в повышении точности все же существует, и на то есть несколько причин.

Прежде всего, определим понятие точность, использованное в этой работе применительно к солнечной модели. Очевидно, речь не идет о физической точности, т.к. физика задачи заведомо содержит большие неточности. Однако если мы зафиксируем все физические данные, то можно вести речь о математической точности, и именно она и имеется в виду. Это аккуратность интерполяции таблиц непрозрачности и уравнения состояния, точность интегрирования уравнений строения (1.1–1.8) и решения краевой задачи (1.12–1.13), точность интегрирования уравнений эволюции, точность калибровки эволюционного трека. Под словом "точность" понимается математическая точность и согласованность полученного решения для вложенной краевой задачи; погрешности входных данных при этом не рассматриваются.

Итак, зачем же нужна эта математическая точность? Во-первых, чтобы иметь возможность отделять исследуемый эффект от погрешностей вычислений. Если, скажем, необходимо выяснить, как влияет строение верхних слоев конвективной зоны на модель внутреннего строения Солнца, то при малой точности модели невозможно отделить исследуемый эффект (который заведомо мал) от ошибок интегрирования/сшивки.

Вторая причина имеет принципиальный характер. Частоты колебаний Солнца известны с очень высокой точностью и, следовательно, для извлечения этой информации необходимо иметь соответствующую модель Солнца. Заметим, что это не противоречит тому, что эволюционная модель слабо зависит от строения внешних слоев конвективной зоны, а частоты – сильно: эти слои влияют на все частоты примерно одинаковым образом, и благодаря этому факту можно выделить факторы, относящиеся к строению солнечного ядра.

2.3. Проблемы расчета модели Солнца с высокой точностью

Главная задача – **обеспечение хорошей и прогнозируемой точности всех основных величин (масса, плотность, температура, давление, химический состав, выделение энергии) в каждой точке радиуса стандартной модели.** Почти везде (где не оговорено особо) предполагается, что относительная ошибка в величине $(\delta y/y)$ не должна превышать заданного уровня ε. В некоторых случаях ошибки могут быть больше, если это не влияет на параметры модели в целом и частоты колебаний.

Поскольку **расчеты многоступенчаты**, то **необходимо обеспечить контроль точности на каждом этапе**. Очевидно, погрешность результата расчетов будет суммой ошибок, сделанных на каждом этапе.

Строение внешних слоев конвективной зоны и атмосферы оказывает слабое влияние на внутреннюю структуру Солнца: между стандартными моделями, рассчитанными даже с очень высокой точностью, будет некоторая разница в самых внешних слоях. Эта разница может быть существенной при расчете акустических колебаний. Ее можно исключить только путем стандартизации методов расчета внешних слоев.

При формальном применении критерия Шварцшильда получается, что **на нижней границе конвективной зоны имеется излом градиента температуры** (который из практически постоянного адиабатического становится быстро падающим лучистым; см. рис. 3.1, 3.2). Разумеется, в реальном Солнце никакого излома быть не может, но физическая и математическая трактовки переходного слоя между лучистым переносом и конвекцией ("overshooting") недостаточно разработаны и в этой работе не используются. Этот излом (или разрыв второй производной температуры) вызывает трудности при интегрировании уравнений строения. Интересно, что *верхняя* граница конвективной зоны (расположенная непосредственно под солнечной атмосферой) особых проблем не создает, т.к. в ней лучистый градиент очень близок к атмосферному (см. §2.4.2).

В центре Солнца уравнения строения имеют особую точку: некоторые производные (1.1–1.6) обращаются в нуль (или бесконечность в зависимости от выбора независимой переменной).

Эволюционная калибровка (см. §1.1) использует значение радиуса Солнца, получаемое из наблюдений. Однако здесь **понятие радиуса само требует уточнения** с двух существенно различных позиций: 1) что подразумевается под радиусом Солнца в модели; 2) какое отношение эта величина имеет к наблюдаемому значению? К тому же в атмосфере Солнца уравнение лучистого переноса энергии теряет свою применимость. Особенность данного параметра также состоит в том, что радиус модели, как геометрическая характеристика колебательной системы, оказывает непосредственное влияние на собственные частоты колебаний. Это приводит к тому, что требуется обеспечить согласованность различных моделей по величине радиуса на уровне, значительно превышающем точность наблюдательного значения.

Результат интегрирования уравнений строения используется двояким образом – во-первых, значения решений в точке сшивки (т.е. решение краевой задачи); во-вторых, распределение самих интегрируемых величин вдоль независимой переменной интегрирования (радиуса или массы), т.е. собственно модель звезды. Рассмотрим вторую часть задачи. Т.к. получаемое решение является сеточным (определено на некоторой сетке точек), необходимо выяснить, **какова должна быть структура и густота этой сетки** для того, чтобы решение можно было использовать, скажем, при расчете колебаний. Здесь возникает также еще одна интересная проблема – чему соответствует получаемое решение – точному решению системы, производным его (т.е. самой системе) и т.д.

Основная часть расчета эволюционного трека – не что иное, как расчет изменения профиля содержания водорода с течением эволюции. Соответственно, необходимо обеспечить достаточную точность представления этого профиля, чтобы предотвратить ошибку пересчета профиля между моделями.

2.4. Использованная методика

В работе была использована следующая замена переменных, предложенная в Morel, Provost, Berthomieu 1990. Согласно вышеуказанной работе, замена позволяет получить более гладкое поведение переменных, что благоприятно для численного интегрирования:

$$\begin{aligned} \xi &= (r/R)^2 \\ \mu &= (M_r/M)^{2/3} \\ \lambda &= (L_r/L)^{2/3} \\ \eta &= lnP \\ \theta &= lnT \\ \omega &= ln\rho \end{aligned} \tag{2.4}$$

Уравнения строения (1.1–1.8) в новых переменных:

$$\frac{d\xi}{d\mu} = \frac{3M}{4\pi R^3}\frac{1}{\rho}\left(\frac{\mu}{\xi}\right)^{1/2} \tag{2.5}$$

$$\frac{d\eta}{d\mu} = -\frac{3GM^2}{8\pi R^4}\frac{1}{P}\left(\frac{\mu}{\xi}\right)^2 \tag{2.6}$$

$$\frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{M}{L}\left[\varepsilon - \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{P}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial t}\right]\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{1/2} \tag{2.7}$$

$$\frac{d\theta}{d\mu} = \nabla\frac{d\eta}{d\mu} \tag{2.8}$$

$$\frac{d\omega}{d\mu} = \chi_\rho^{-1}\left\{(1-\chi_T\nabla)\frac{d\eta}{d\mu} - \frac{\chi_X}{X}\frac{dX}{d\mu}\right\} \tag{2.9}$$

Отметим, что в центре (при $\mu = 0$, $\xi = 0$ и $\lambda = 0$)

$$\left(\frac{\mu}{\xi}\right)_c = \left(\frac{4\pi\rho_c R^3}{3M}\right)^{2/3} \tag{2.10}$$

$$\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)_c = \left(\frac{L}{M\varepsilon_c}\right)^{2/3} \tag{2.11}$$

Граничные условия:

$$\begin{array}{llll} \mu = 0 & : & \xi = 0 & \lambda = 0 \\ \mu = 1 & : & \omega = \ln \rho_{surf} & \theta = \ln T_{surf} \end{array} \tag{2.12}$$

2.4.1. Разложение в центре

Замена переменных (2.4) позволяет избавиться от бесконечных производных переменных интегрирования в центре. Однако легко видеть, что производные высшего порядка все равно остаются бесконечными. При использовании метода интегрирования высокого порядка это приводит к появлению ошибок. Чтобы избежать их, решение приходится разлагать в ряд по одной из переменных, следя за размером области разложения для сохранения точности. Наиболее удобной для разложения независимой переменной является радиус r. Разложение можно произвести по формуле Тейлора (с центром в точке $r = 0$), последовательно вычисляя производные высоких порядков.

Запишем сначала плотность ρ без вычисления производных (индексами 2,4 обозначены значения производных соответствующих порядков при $r = 0$):

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_c + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\frac{d^i \rho}{dr^i} \right)_{r=0} r^i \\ &\approx \rho_c + \frac{1}{2}\rho_2 r^2 + \frac{1}{24}\rho_4 r^4 \\ &= \rho_c \left[1 + \frac{1}{2}\frac{\rho_2}{\rho_c} r^2 + \frac{1}{24}\frac{\rho_4}{\rho_c} r^4 \right] \end{aligned} \tag{2.13}$$

1) Доля массы M_r, содержащаяся внутри сферы радиуса r с центром в центре Солнца:

$$\begin{aligned} M_r &\approx \frac{4}{3}\pi\rho_c r^3 + \frac{2}{5}\pi\rho_2 r^5 + \frac{1}{42}\pi\rho_4 r^7 \\ &= \frac{4}{3}\pi\rho_c r^3 \left[1 + \frac{3}{10}\frac{\rho_2}{\rho_c} r^2 + \frac{1}{56}\frac{\rho_4}{\rho_c} r^4 \right] \end{aligned} \tag{2.14}$$

2) Доля светимости L_r, содержащаяся внутри сферы радиуса r с центром в центре Солнца:

$$\begin{aligned} L_r &\approx \frac{4}{3}\pi\rho_c\epsilon_c r^3 + \frac{2}{5}\pi(\rho_2\epsilon_c + \rho_c\epsilon_2) r^5 + \frac{1}{42}\pi(6\rho_2\epsilon_2 + \rho_c\epsilon_4 + \rho_4\epsilon_c) r^7 \\ &= \frac{4}{3}\pi\rho_c\epsilon_c r^3 \left[1 + \frac{3}{10}\left(\frac{\rho_2}{\rho_c} + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_c} \right) r^2 + \frac{3}{28}\left(\frac{\rho_2}{\rho_c}\frac{\epsilon_2}{\epsilon_c} + \frac{1}{6}\frac{\epsilon_4}{\epsilon_c} + \frac{1}{6}\frac{\rho_4}{\rho_c} \right) r^4 \right] \end{aligned} \tag{2.15}$$

(заметим, что разложения для энерговыделения ϵ и непрозрачности κ тоже не включают членов с нечетными степенями r, т.к. эти величины в свою очередь зависят от тех же ρ, T, X, которые имеют нулевые производные четных степеней при $r = 0$):

$$\epsilon \approx \epsilon_c + \frac{1}{2}\epsilon_2 r^2 + \frac{1}{24}\epsilon_4 r^4 \tag{2.16}$$

$$\kappa \approx \kappa_c + \frac{1}{2}\kappa_2 r^2 + \frac{1}{24}\kappa_4 r^4 \tag{2.17}$$

3) Давление P:

$$\begin{aligned} P &\approx P_c - \frac{2}{3}\pi G\rho_c^2 r^2 - \frac{4}{15}\pi G\rho_2\rho_c r^4 \\ &= P_c - \frac{2}{3}\pi G\rho_c^2 r^2 \left[1 + \frac{2}{5}\frac{\rho_2}{\rho_c} r^2\right] \end{aligned} \tag{2.18}$$

4) Температура T:

$$T \approx T_c + \frac{1}{2}T_2 r^2 \left[1 + \left(\frac{2}{5}\frac{\rho_2}{\rho_c} + \frac{1}{4}\frac{\kappa_2}{\kappa_c} + \frac{3}{20}\frac{\epsilon_2}{\epsilon_c} - \frac{3}{4}\frac{T_2}{T_c}\right) r^2\right] \tag{2.19}$$

здесь

$$T_2 = -\frac{\rho_c^2\kappa_c\epsilon_c}{16\sigma T_c^3} \tag{2.20}$$

5) Чтобы теперь в свою очередь получить выражения для плотности (т.е. ее производные), воспользуемся тем фактом, что у нас есть уравнение состояния (в том числе производные давления):

$$\frac{P_2}{P_c} = \chi_T\frac{T_2}{T_c} + \chi_\rho\frac{\rho_2}{\rho_c} + \chi_X\frac{X_2}{X_c} \tag{2.21}$$

$$\frac{P_4}{P_c} = 3\frac{d^2\chi_T}{dr^2}\frac{T_2}{T_c} + \chi_T\frac{T_4}{T_c} + 3\frac{d^2\chi_\rho}{dr^2}\frac{\rho_2}{\rho_c} + \chi_\rho\frac{\rho_4}{\rho_c} + 3\frac{d^2\chi_X}{dr^2}\frac{X_2}{X_c} + \chi_X\frac{X_4}{X_c} \tag{2.22}$$

$$\rho_2 = \frac{\rho_c}{\chi_\rho}\left(\frac{P_2}{P_c} - \chi_T\frac{T_2}{T_c} - \chi_X\frac{X_2}{X_c}\right) \tag{2.23}$$

$$\rho_4 = \frac{\rho_c}{\chi_\rho}\left(\frac{P_4}{P_c} - 3\frac{d^2\chi_T}{dr^2}\frac{T_2}{T_c} - \chi_T\frac{T_4}{T_c} - 3\frac{d^2\chi_\rho}{dr^2}\frac{\rho_2}{\rho_c} - 3\frac{d^2\chi_X}{dr^2}\frac{X_2}{X_c} - \chi_X\frac{X_4}{X_c}\right) \tag{2.24}$$

Вторую производную массовой доли водорода X можно получить из профиля химического состава:

$$X_2 = 2\left(\frac{dX}{d\mu}\right)_c \left(\frac{4\pi\rho_c}{3M}\right)^{2/3} \tag{2.25}$$

В этих выражениях намеренно оставлено несколько членов высокого порядка, которые трудно вычислить точно (например, содержащие $\epsilon_4 \equiv \left(d^4\epsilon/dr^4\right)_c$). Мы оценим относительную ошибку, вносимую ими, и на основании этого определим максимально допустимый размер области разложения. Типичные значения для современного Солнца:

$$
\begin{array}{lll}
T_c = 15.717 \cdot 10^6 \text{ K} & R_\odot^2 \frac{T_2}{T_c} = -44.0 & R_\odot^2 \frac{T_4}{T_c} = 2.25 \cdot 10^4 \\
P_c = 2.30 \cdot 10^{17} \text{ дин/см}^2 & R_\odot^2 \frac{P_2}{P_c} = -134 & R_\odot^2 \frac{P_4}{P_c} = 1.03 \cdot 10^5 \\
\rho_c = 150.8 \text{ г/см}^3 & R_\odot^2 \frac{\rho_2}{\rho_c} = -160 & R_\odot^2 \frac{\rho_4}{\rho_c} = 5.04 \cdot 10^4 \\
X_c = 0.332 & R_\odot^2 \frac{X_2}{X_c} = 200 & \\
\epsilon_c = 16.76 \text{ эрг/(г} \cdot \text{с)} & R_\odot^2 \frac{\epsilon_2}{\epsilon_c} = -143 & \\
\kappa_c = 1.32 \text{ г/см}^2 & R_\odot^2 \frac{\kappa_2}{\kappa_c} = 39.4 & \\
\chi_T = 0.985 & \chi_\rho = 1.015 & \chi_X = 0.361 \\
\left(\frac{\partial \log \kappa}{\partial \log T}\right)_c = -1.74 & \left(\frac{\partial \log \kappa}{\partial \log \rho}\right)_c = 0.37 & \left(\frac{\partial \log \kappa}{\partial \log X}\right)_c = 0.11 \\
\left(\frac{\partial \log \epsilon}{\partial \log T}\right)_c = 6.85 & \left(\frac{\partial \log \epsilon}{\partial \log \rho}\right)_c = 1.04 & \left(\frac{\partial \log \epsilon}{\partial \log X}\right)_c = 1.62 \\
\left(\frac{\partial \log \chi_T}{\partial \log \rho}\right)_c = -0.027 & \left(\frac{\partial \log \chi_T}{\partial \log T}\right)_c = 0.040 & \left(\frac{\partial \log \chi_T}{\partial \log X}\right)_c = -0.0083 \\
\left(\frac{\partial \log \chi_\rho}{\partial \log \rho}\right)_c = 0.0182 & \left(\frac{\partial \log \chi_\rho}{\partial \log T}\right)_c = -0.027 & \left(\frac{\partial \log \chi_\rho}{\partial \log X}\right)_c = 0.0039 \\
\left(\frac{\partial \log \chi_X}{\partial \log \rho}\right)_c = 0.0114 & \left(\frac{\partial \log \chi_X}{\partial \log T}\right)_c = -0.025 & \left(\frac{\partial \log \chi_X}{\partial \log X}\right)_c = 0.68 \\
R_\odot^2 \left(\frac{d^2 \chi_T}{dr^2}\right)_c = 0.886 & R_\odot^2 \left(\frac{d^2 \chi_\rho}{dr^2}\right)_c = -0.958 & R_\odot^2 \left(\frac{d^2 \chi_\rho}{dr^2}\right)_c = -0.958
\end{array}
\tag{2.26}
$$

(оценки четвертых производных довольно приблизительны; большинство из них включает численное дифференцирование). Обозначая $x \equiv r/R$, для разложения в центре получаем:

$$
\begin{aligned}
M_r &= \frac{4}{3}\pi \rho_c r^3 \left[1 - 48x^2 + 900x^4\right] \\
L_r &= \frac{4}{3}\pi \rho_c \epsilon_c r^3 \left[1 - 300x^2 + 7400x^4\right] \\
P &= P_c \left[1 - 67x^2 + 4300x^4\right] \\
\rho &= \rho_c \left[1 - 80x^2 + 2100x^4\right] \\
T &= T_c \left[1 - 22x^2 + 940x^4\right]
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

Поскольку коэффициенты при x^4 затруднительно вычислить точно, эти члены использовались для оценки ошибки.

Итак, формулы (2.27) дают ошибки разложения в ряд Тейлора в точке $r = r_{exp}$. Однако сшивка решений происходит в точке μ_{fit}, что означает, что необходимо выяснить, какую погрешность вызовет ошибка разложения в значениях в точке μ_{fit}. Определим набор функций двух переменных $V_{ij}(\mu_1, \mu_{fit})$ и назовем их функциями влияния:

$$
\frac{\delta Y_j}{Y_j}_{fit}(\mu_{fit}) = V_{ij}(\mu_1, \mu_{fit}) \frac{\delta Y_i}{Y_i}(\mu_1), \tag{2.28}
$$

т.е. функция $V_{ij}(\mu_1, \mu_{fit})$ отражает, как относительная ошибка в точке μ_1 в переменной Y_i влияет на относительную ошибку в переменной Y_j в точке сшивки. Графики этих функций для стандартной солнечной модели и точки сшивки $\mu_{fit} = 0.49$ приведены в §2.4.3.

Так можно оценить, какую погрешность в точке сшивки вызывает погрешность разложения в центре. Коэффициенты пересчета (которые можно оценить по графикам из §2.4.3) приводят к следующим выражениям для ошибок в точке сшивки, возникающим из-за погрешностей разложения в центре:

$$\begin{aligned}
\max_j \left(\frac{\delta Y_j}{Y_j}\right)_{fit} \left(\frac{\delta M_r}{M_r}\right) &= 900x^4 \cdot 0.02 = 180x^4 \\
\max_j \left(\frac{\delta Y_j}{Y_j}\right)_{fit} \left(\frac{\delta L_r}{L_r}\right) &= 7400x^4 \cdot 0.02 = 150x^4 \\
\max_j \left(\frac{\delta Y_j}{Y_j}\right)_{fit} \left(\frac{\delta T}{T}\right) &= 940x^4 \cdot 55 = 52000x^4 \\
\max_j \left(\frac{\delta Y_j}{Y_j}\right)_{fit} \left(\frac{\delta \rho}{\rho}\right) &= 2100x^4 \cdot 16 = 34000x^4
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Ошибка, вызываемая погрешностью разложения температуры, максимальна (заметим, что это ошибка в светимости в точке сшивки) – $5.2 \cdot 10^4 x^4$. Теперь можно оценить максимально допустимый размер разложения. Пусть рассчитывается модель Солнца с точностью 10^{-5}, тогда разумно производить сшивку с точностью 10^{-6}, и ограничить погрешность, вызываемую разложением, величиной 10^{-7}:

$$5.2 \cdot 10^4 x^4 < 10^{-7} \tag{2.30}$$

$$x < 0.001 \tag{2.31}$$

Таков максимальный размер области разложения в центре.

2.4.2. Атмосфера звезды (внешние граничные условия)

Под атмосферой звезды мы будем понимать область, где оптическая глубина сравнительно невелика (меньше единицы) и часть излучения непосредственно выходит из звезды, не взаимодействуя с веществом. Очевидно, диффузионное приближение, использованное для описания переноса энергии в глубоких слоях, здесь полностью неприменимо. Расчет переноса энергии в атмосферах звезд (т.е. расчет моделей атмосфер) – отдельная сложная задача, и параллельное решение ее в рамках программ расчета эволюции звезд нереально из-за большого объема вычислений. Вдобавок строение атмосфер весьма слабо влияет на внутреннюю структуру (это продемонстрировано ниже).

Поэтому во всех программах расчета эволюции звезд берутся некие готовые модели атмосфер, которые затем адаптируются к требуемым значениям радиуса, светимости, массы звезды.

В нашей программе использована модель атмосферы HSRA (Harvard-Smithsonian Reference Atmosphere, Gingerich *et al.* 1971). В работе Ando, Osaki 1975 приведена аппроксимация этой модели в виде зависимости $T(\tau)$ и эффективной температурой в качестве параметра:

$$T^4(T_{eff}, \tau) = \frac{3}{4} T_{eff}^4 (\tau + 1.017 - 0.3 \exp(-2.54\tau) - 0.291 \exp(-30\tau)) \tag{2.32}$$

Заметим, что зависимость $T(\tau)$ желательно было бы параметризовать двумя (или даже тремя) переменными – эффективной температурой, ускорением силы тяжести (и, возможно, химическим составом).

Имея зависимость $T(\tau)$, естественно сделать оптическую толщу τ переменной интегрирования. Уравнения строения перепишутся тогда следующим образом:

$$\frac{dr}{d\tau} = -\frac{1}{\kappa\rho} \tag{2.33}$$

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{GM_r}{\kappa r^2} \tag{2.34}$$

$$\frac{dM_r}{d\tau} = -\frac{4\pi r^2}{\kappa} \tag{2.35}$$

$$\frac{dT}{d\tau} = \frac{T}{P} \nabla_{atm} \frac{dP}{d\tau} \tag{2.36}$$

$$\nabla_{atm} = \frac{P\kappa r^2}{GM_r\tau} \frac{dT}{d\tau} \tag{2.37}$$

Далее необходимо сделать еще несколько предположений.

Во-первых, это начальная точка – внешнее граничное условие для атмосферы (точнее, значения оптической толщи τ и плотности в некоторой точке τ_0; температура получается из закона (2.32), массу и светимость полагаем равными массе и светимости звезды, радиус фиксируется в другой точке). Зададим их при достаточно малом τ, чтобы плотностью в этой точке можно было пренебречь. Исходя из HSRA модели было выбрано

$$\rho_0 = 10^{-9} \text{ г/см}^3 \text{ при } \tau_0 = 0.0001 \tag{2.38}$$

(такая же точка предлагалась в Morel, Provost, Berthomieu 1990). Реально эти значения оказывают ничтожно малое влияние на строение звезды. Например, относительные изменения в параметрах звезды при выборе $\rho_0 = 2 \cdot 10^{-9}$ г/см^3 вместо $\rho_0 = 10^{-9}$ г/см^3 (модель 350-0122):

$$\begin{aligned} \delta\rho_c/\rho_c &= 8.5 \cdot 10^{-8} \\ \delta T_c/T_c &= 3.5 \cdot 10^{-7} \\ \delta L/L &= 2.0 \cdot 10^{-6} \\ \delta R/R &= 5.5 \cdot 10^{-6} \end{aligned} \tag{2.39}$$

Выбор $\tau_0 = 0.0002$ вместо $\tau_0 = 0.0001$ (модель 350-0123):

$$\begin{aligned} \delta\rho_c/\rho_c &= 1.5 \cdot 10^{-7} \\ \delta T_c/T_c &= 6.2 \cdot 10^{-7} \\ \delta L/L &= 3.8 \cdot 10^{-6} \\ \delta R/R &= 2.7 \cdot 10^{-5} \end{aligned} \tag{2.40}$$

Во-вторых, необходимо привязать значение радиуса звезды (в частности, наблюдаемый радиус Солнца $R_\odot$) к какой-либо точке модели атмосферы. В работе Schmiedler, Mein 1986 предложено считать, что наблюдаемый радиус соответствует $\tau = 0.01$. Это значение получено исходя из модели "косого луча", т.е. именно так, как мы измеряем видимый радиус Солнца. Итак,

$$r/R = 1 \text{ при } \tau = 0.01 \tag{2.41}$$

Интересно, что температура *не* равна эффективной T_{eff} в точке $r = R$. Отметим, что с точки зрения теории внутреннего строения особого значения выбор этой точки не имеет, так как приводит лишь к изменению параметра α, который имеет чисто калибровочное значение.

Во-третьих, нужно зафиксировать точку перехода от модели атмосферы к интегрированию уравнений внутреннего строения. Это также определяет, будет ли переход от атмосферы к оболочке гладким, т.е. будут ли равны градиенты температуры на стыке. Если выбрать ее при малых τ, то в ней будет плохо выполняться диффузионное приближение. Большие τ (5-10), очевидно, вызовут трудности с моделью атмосферы; к тому же при $\tau = 0.8 - 1.0$ начинается конвекция! По-видимому, адекватного решения этой проблемы пока не существует, поэтому предложен следующий подход: в атмосфере интегрируются уравнения (2.33–2.36), градиент температуры определяется из закона $T(\tau)$ до $\tau = 1$, далее используется "диффузионный" градиент (3.1). В интервале $0.9 < \tau < 1.0$ происходит плавный переход от атмосферного градиента к диффузионному, чтобы избежать возникновения "численного шума". Примерно при $\tau = 0.8$

начинается конвекция; градиент рассчитывается с помощью теории длины пути перемешивания, где вместо лучистого градиента ∇_{rad} до $\tau = 1$ подставляется атмосферный ∇_{atm} (см. рис. 2.1).

Фактически для расчета оболочки требуется внешнее граничное условие, т.е. некая точка (M_r/M, r/R, ρ, T, L_r). Заметим, что изменением массы и светимости в атмосфере обычно можно пренебречь. В качестве входных данных имеются масса, радиус и светимость звезды. Светимость L и радиус R дают эффективную температуру $T_{eff}^4 = L/(4\pi R^2 \sigma)$. Уравнения (2.33–2.36) интегрируются от точки (2.38) до $\tau = 1$ (с замечаниями, описанными в предыдущем абзаце), и далее интегрируются уже уравнения (2.5–2.9), с μ в качестве переменной интегрирования. Поскольку мы фиксируем радиус в промежуточной точке $\tau = 0.01$, то значение при $\tau = 0.0001$ неизвестно заранее. Сначала производится пробное интегрирование уравнений (2.33–2.36) до $\tau = 1$ (принимая $r/R = 1$ при $\tau = 0.0001$), затем начальное значение радиуса корректируется так, чтобы получить $r/R = 1$ в точке $\tau = 0.01$.

Чтобы продемонстрировать эффект слабого влияния структуры атмосферы на внутреннее строение, была рассчитана модель, в которой вместо закона $T(\tau)$ использовалось диффузионное приближение. На рис. 2.1 показаны градиенты в атмосфере Солнца (типичная стандартная модель), и очевидно, что диффузионное приближение неприменимо в атмосфере. Однако модель Солнца "с непрозрачной атмосферой" имеет параметры, незначительно отличающиеся от параметров стандартной модели; например, содержание гелия отличается на 0.05%, поток борных нейтрино – на 0.3%, глубина конвективной зоны – на 0.1%. Единственное отличие – в α, и в этом и состоит суть эволюционной перекалибровки при изменении атмосферы или внешних слоев конвективной зоны – строение ядра и лучистой зоны остается неизменным.

2.4.3. Интегрирование уравнений строения

Уравнения строения интегрируются явным методом Рунге-Кутты 4-го порядка: решаются обыкновенные дифференциальные уравнения вида (см. любой учебник по численным методам)

$$dy/dx = f(x, y) \tag{2.42}$$

Один шаг интегрирования (от (x_1, y_1) до $(x_1 + h, y_2)$) состоит в вычислении

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_1, y_1) \\
k_2 &= f(x_1 + h/2, y_1 + k_1 h/2) \\
k_3 &= f(x_1 + h/2, y_1 + k_2 h/2) \\
k_4 &= f(x_1 + h, y_1 + k_3 h) \\
y_2 &= y_1 + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h/6
\end{aligned} \tag{2.43}$$

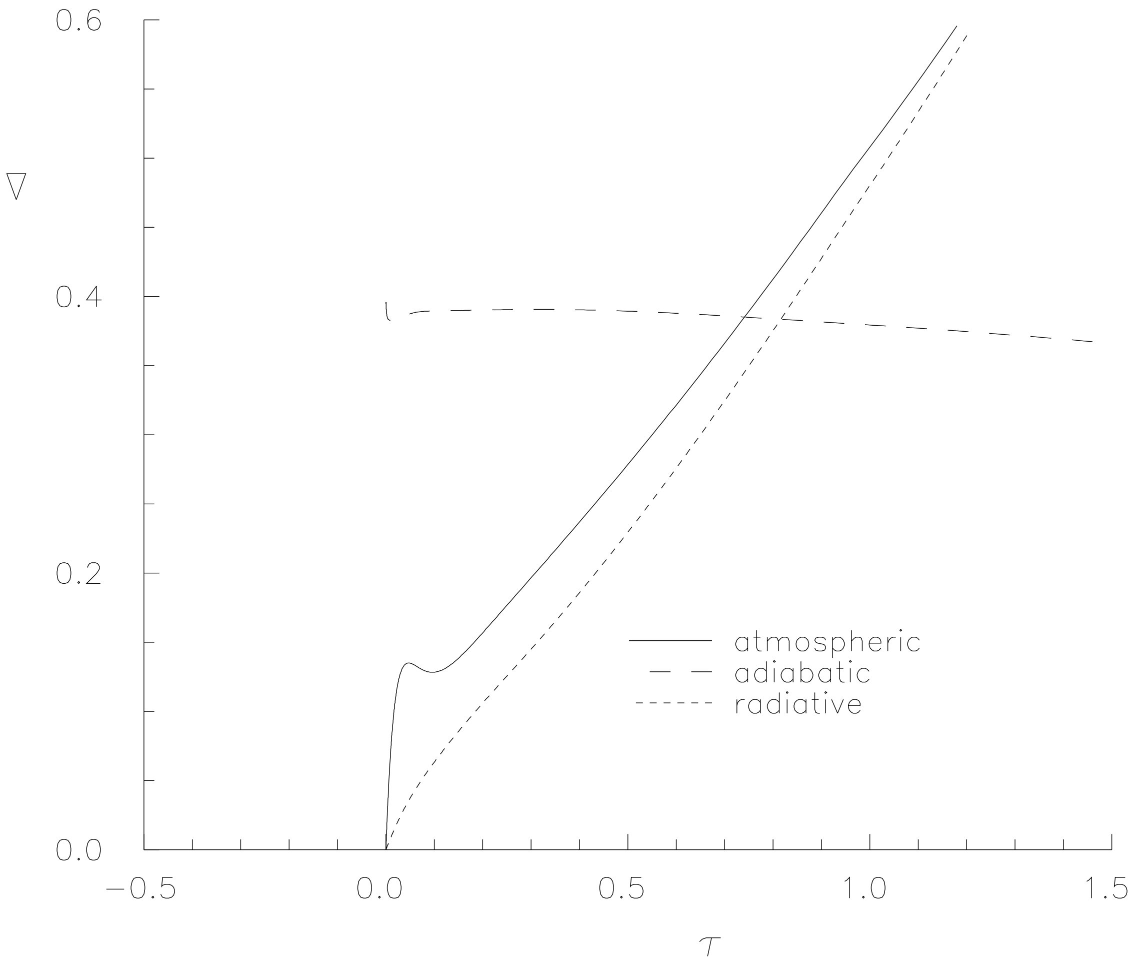

Рис. 2.1. Градиенты температуры в атмосфере типичной модели Солнца. Обратите внимание, что даже после наступления конвекции (лучистый и атмосферный градиенты больше адиабатического) диффузионное приближение все еще выполняется плохо (разница между атмосферным и лучистым градиентами велика). Адиабатический градиент близок к показателю для идеального газа (0.4).

Рассмотрим вопрос о выборе размера шага интегрирования. С одной стороны, измельчение шага повышает точность, с другой стороны – увеличивает объем вычислений. Чтобы избежать неоправданного увеличения времени счета, разумно выбирать величину шага интегрирования так, чтобы на каждый шаг приходился примерно одинаковый вклад в величину ошибки в конечной точке интегрирования. Более подробно – предположим, интегрируется переменная Y_i (например, температура T) от $\mu = 0$ ($\mu \equiv (Mr/M)^{2/3}$) до $\mu = \mu_{fit}$ (точки сшивки). Необходимо, чтобы конечное значение Y_i^{fit} имело относительную погрешность не более C_{max}:

$$(\delta Y_i/Y_i)_{fit} < C_{max} \tag{2.44}$$

Пусть интегрирование производится за N шагов по радиусу. Ошибка метода на каждом шаге может быть оценена с помощью повторного интегрирования с половинным шагом:

$$\begin{aligned}
k_{11} &= f(x_1, y_1) \\
k_{21} &= f(x_1 + h/4, y_1 + k_{11}h/4) \\
k_{31} &= f(x_1 + h/4, y_1 + k_{21}h/4) \\
k_{41} &= f(x_1 + h/2, y_1 + k_{31}h/2) \\
y_{1\frac{1}{2}} &= y_1 + (k_{11} + 2k_{21} + 2k_{31} + k_{41})h/12 \\
\\
k_{12} &= f(x_1 + h/2, y_{1\frac{1}{2}}) \\
k_{22} &= f(x_1 + 3h/4, y_{1\frac{1}{2}} + k_{12}h/4) \\
k_{32} &= f(x_1 + 3h/4, y_{1\frac{1}{2}} + k_{22}h/4) \\
k_{42} &= f(x_1 + h, y_{1\frac{1}{2}} + k_{32}h/2) \\
y_{2'} &= y_{1\frac{1}{2}} + (k_{12} + 2k_{22} + 2k_{32} + k_{42})h/12
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Погрешность метода четвертого порядка пропорциональна h^5, причем коэффициент пропорциональности зависит от высших производных решения в точках интегрирования. Поскольку размер шага интегрирования невелик, то можно пренебречь различием коэффициента пропорциональности при расчете двумя способами (одним шагом и двумя половинного размера):

$$y_2 - y_{20} = Bh^5 \tag{2.46}$$

$$y_{2'} - y_{20} = 2B\,(h/2)^5 \tag{2.47}$$

$$y_2 - y_{2'} = 15/16Bh^5 \tag{2.48}$$

$$B = \frac{16(y_2 - y_{2'})}{15h^5} \approx \frac{y_2 - y_{2'}}{h^5} \tag{2.49}$$

(под y_{20} подразумевается точное решение). Ошибка $\delta Y_i(\mu)$, возникающая в точке данной точке μ, вызывает ошибки $\delta Y_j(\mu_{fit})$ в переменных Y_j в точке сшивки μ_{fit} согласно определению матрицы влияния из §2.4.1:

$$(\delta Y_j/Y_j)\,(\mu_{fit}) = V_{ij}B_i h(\mu)^5/Y_i \tag{2.50}$$

Чтобы суммарная ошибка интегрирования не превысила заданной величины C_{max}, необходимо выбирать шаг интегрирования соответствующим образом:

$$\max_j \frac{\delta Y_j(\mu_{fit})}{Y_j^{fit}} = \max_j \sum_i V_{ij} \frac{B_i h(\mu)^5}{Y_i(\mu)} < \frac{C_{max}}{N} \tag{2.51}$$

$$h(\mu) = \frac{C_{max}}{N} \left[\max_j \sum_i V_{ij}(\mu) \frac{B_i(\mu)}{Y_i(\mu)} \right]^{-1} \tag{2.52}$$

В правой части последнего выражения не все величины известны в процессе интегрирования. Число шагов N можно приближенно оценить; оно меняется в не очень широких пределах; типичные значения – около 1300 на модель (ядро и оболочку) при $C_{max} = 10^{-6}$, 800 – при $C_{max} = 10^{-5}$. Значения в точке сшивки Y_j^{fit} тоже легко оцениваются. Матрица влияния рассчитывается заранее для типичной модели; графики приведены на рис. 2.2-2.5 для ядра модели и на рис. 2.6-2.9 для оболочки (при точке сшивки $\mu = 0.49$).

Аппроксимация, использованная при реальных расчетах ядер:

$$\begin{aligned} &V_1 = 150(-23\mu + 1) \text{ при } \mu < 0.02, 2 \text{ при } \mu > 0.02 \\ &V_2 = 70(-3.d0\mu + 1) \text{ при } \mu < 0.2, 10(2\mu^2 - 3\mu + 1) \text{ при } \mu > 0.2 \\ &V_3 = 100(10\mu + 1) \text{ при } \mu < 0.2, 400(2\mu^2 - 3\mu + 1) \text{ при } \mu > 0.2 \\ &V_4 = 100(-3\mu^3 + 7\mu^2 - 5\mu + 1) \end{aligned} \tag{2.53}$$

Здесь $V_i = \max_j V_{ij}$, т.е. максимум по номерам переменных в точке сшивки. В оболочке значения V невелики, поэтому они просто ограничены величиной 2 (отметим, что применение $V < 2$ может привести к потере точности в *профиле* переменной – значение в точке сшивки будет хорошим, т.к. оно слабо подвержено влиянию промежуточных точек интегрирования, а в самих промежуточных точках – плохим).

Важно также устранить влияние численных шумов – например, ошибок, связанных с округлением или эффектом случайного выбора точки перехода от конвекции к лучистому переносу энергии. Численные шумы проявляются как непредсказуемые изменения результата при очень малых изменениях входных параметров. Если эти изменения больше, чем требуемая точность сшивки, то сшивка невозможна. При меньших значениях они могут сказаться на вычислении матрицы производных (2.2), и процесс сшивки будет неустойчивым. Присутствие численных шумов в решении можно легко проверить, рассчитывая дважды – второй раз внося малые (на уровне ошибок округления 10^{-15}) изменения в граничные условия. При наличии заметных численных шумов решения будут отличаться гораздо больше, чем на 10^{-15}.

Выбор точки сшивки определяется разумным балансом между ошибками интегрирования оболочки и ядра. Наиболее часто использовалось $\mu_{fit} = 0.49$, для которой приведены функции влияния.

2.4.4. Расчет эволюционного трека

Расчет эволюции эвезды главным образом сводится к учету изменения химического состава, вызванного горением элементов в термоядерных реакциях, перемешиванием в зонах конвекции и т.п. К счастью вычислителей, на Солнце горит только водород

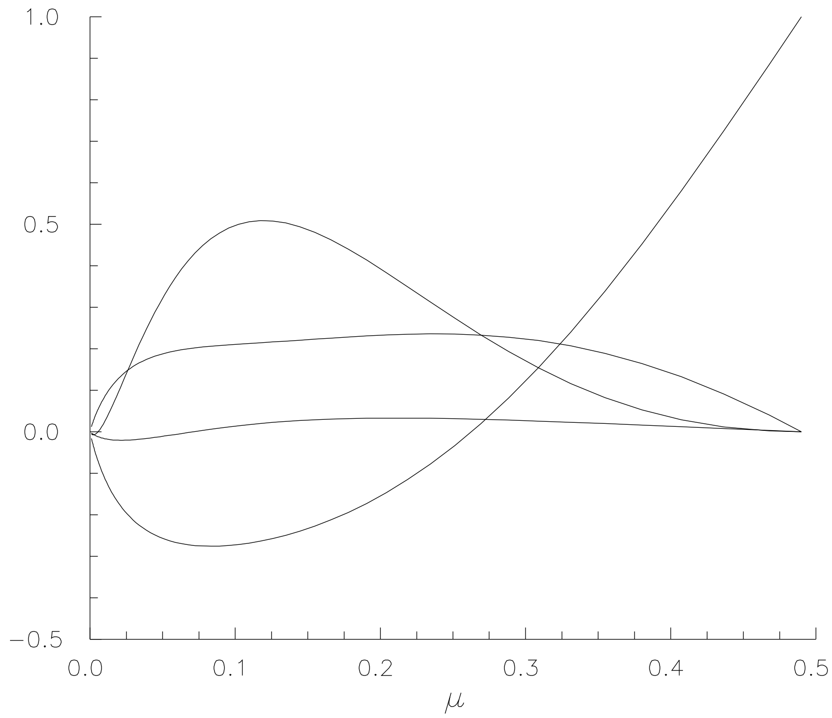

Рис. 2.2. Функция влияния для интегрировании ядра. Варьируемая переменная – радиус r.

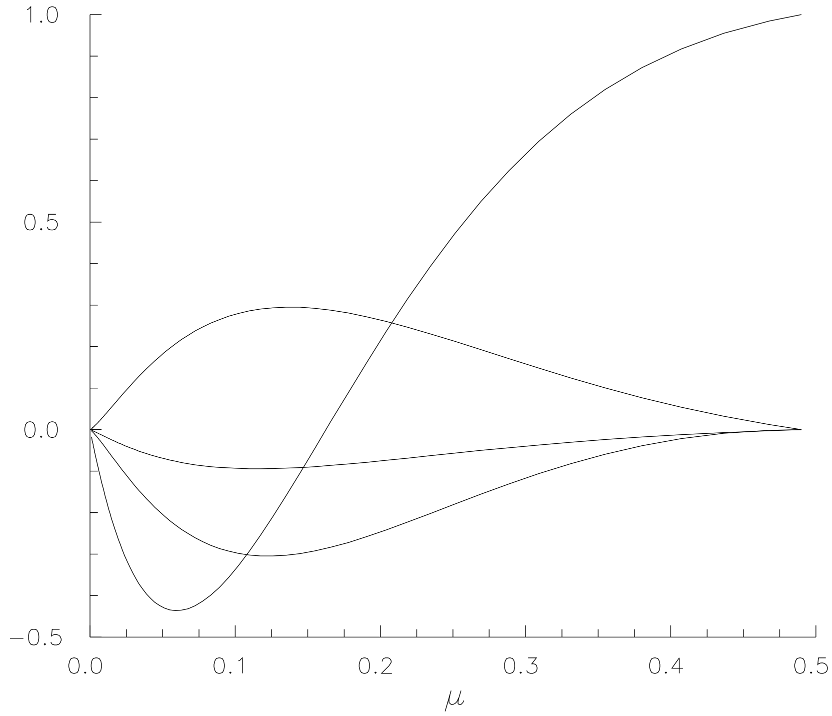

Рис. 2.3. Функция влияния для интегрировании ядра. Варьируемая переменная – светимость L_r.

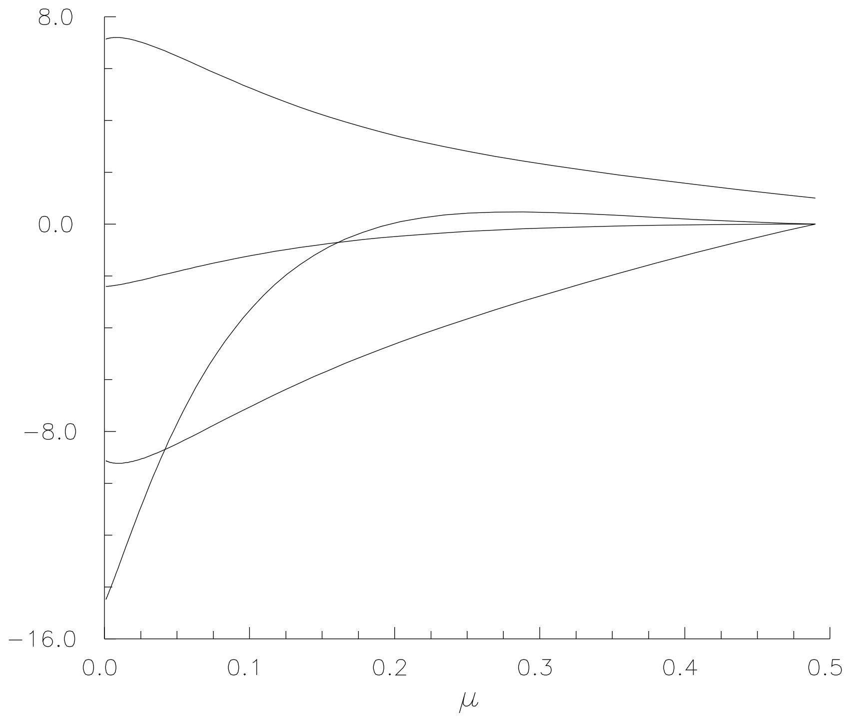

Рис. 2.4. Функция влияния для интегрировании ядра. Варьируемая переменная – плотность ρ.

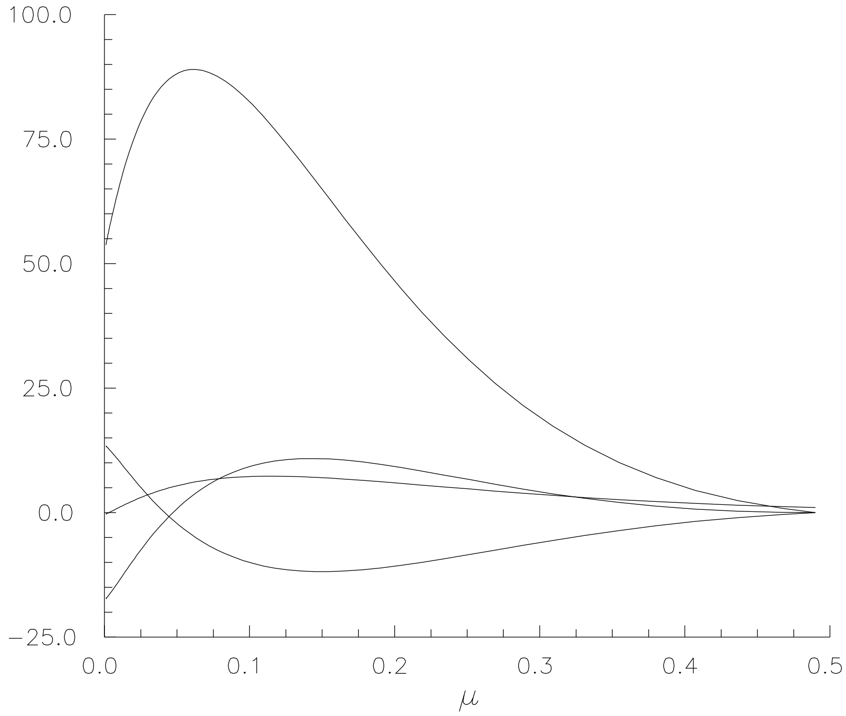

Рис. 2.5. Функция влияния для интегрировании ядра. Варьируемая переменная – температура T.

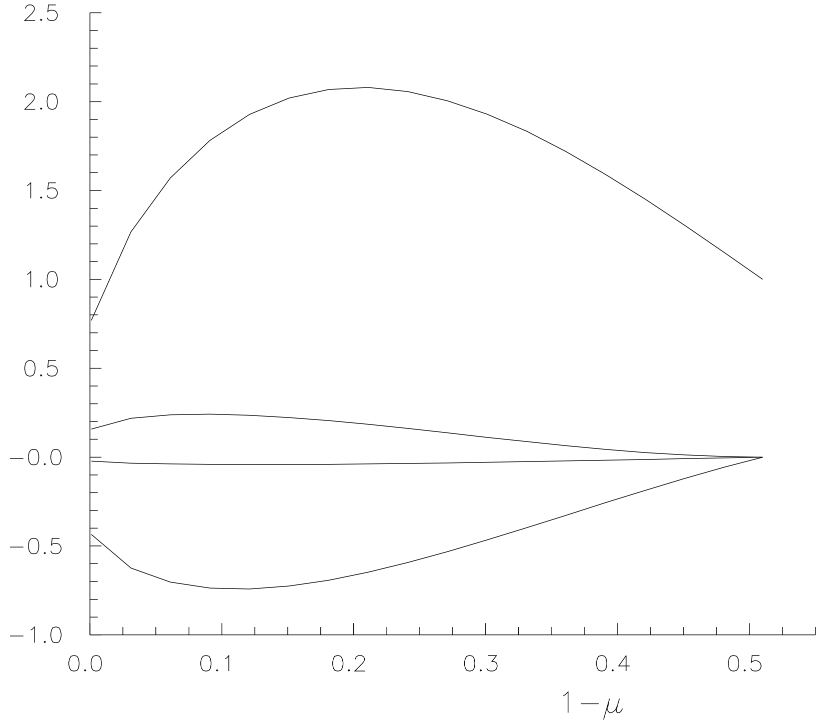

Рис. 2.6. Функция влияния для интегрировании оболочки. Варьируемая переменная – радиус r.

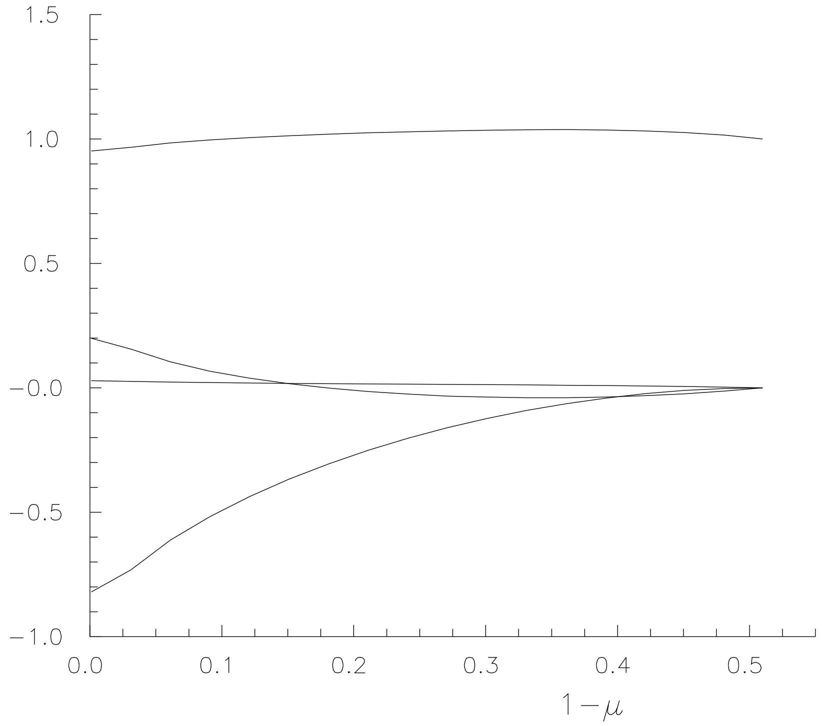

Рис. 2.7. Функция влияния для интегрировании оболочки. Варьируемая переменная – светимость L_r.

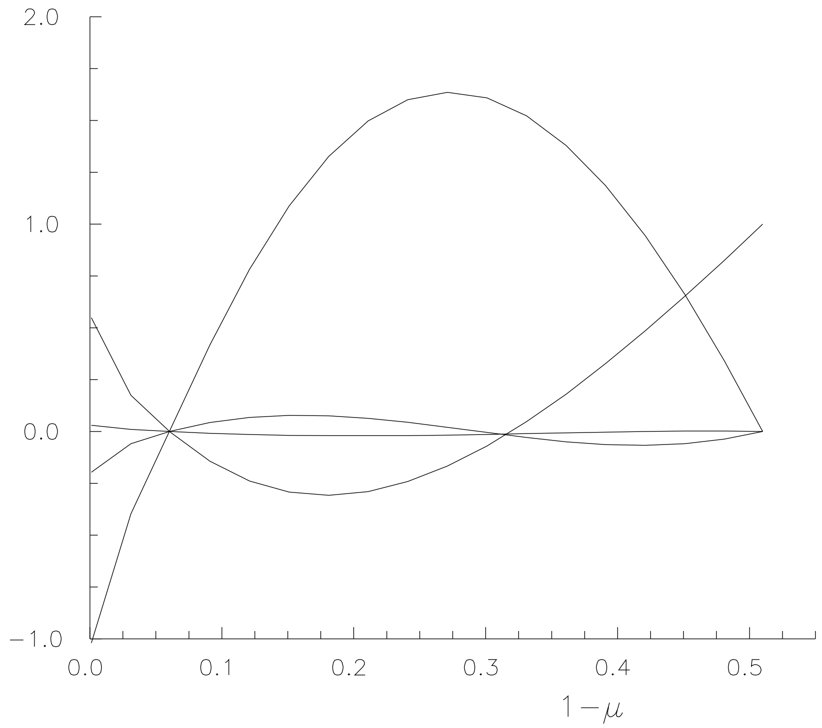

Рис. 2.8. Функция влияния для интегрировании оболочки. Варьируемая переменная – плотность ρ.

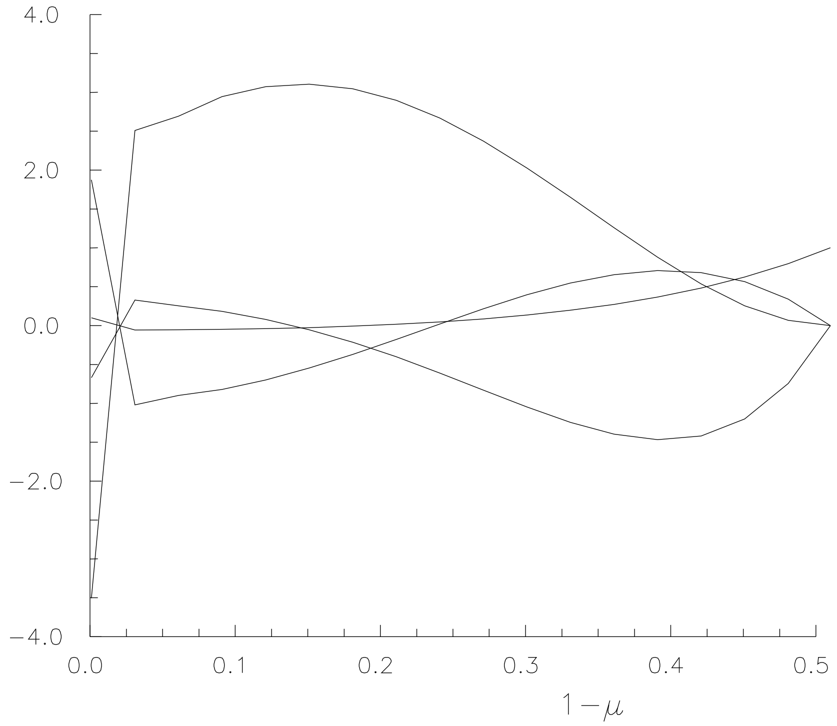

Рис. 2.9. Функция влияния для интегрировании оболочки. Варьируемая переменная – температура T.

и считается, что конвекция не затрагивает зон термоядерных реакций. Это сильно упрощает задачу. Вычисление изменения профиля X сводится к решению уравнения

$$\frac{dX}{dt}\left(\frac{M_r}{M}\right) = f\left[\rho\left(\frac{M_r}{M}\right), T\left(\frac{M_r}{M}\right), X\left(\frac{M_r}{M}\right)\right] \tag{2.54}$$

Здесь $f(...)$ – скорость выгорания водорода в процессе термоядерных реакций. Содержание водорода X привязано, очевидно, к массовой координате (M_r/M или μ), а не радиусу (это является одной из причин выбора μ в качестве переменной интегрирования, а не радиуса r).

Кроме выделения энергии в результате превращения водорода в гелий, на Солнце происходят также перераспределение гравитационной и тепловой энергии – вследствие общего изменения структуры звезды с течением эволюции (например, повышение центральной температуры и плотности). Это отражается в так называемых "гравитационных членах", присутствующих в выражении для энерговыделения (1.3). Для их вычисления необходимо знать производные dU/dt и $d\rho/dt$. Они оцениваются путем вычисления разностей между соседними моделями трека, т.е. методом первого порядка. Их значения, однако, невелики и поэтому это не должно вносить заметных ошибок.

Интегрирование выполняется методом "предиктор-корректор" второго порядка; на 1 шаг интегрирования тратится одно вычисление правых частей. Для второй точки трека использование двухшагового метода невозможно, и она вычисляется методом первого порядка. Пусть имеются две точки трека $i-1$, i: $(X_{i-1},\ \rho_{i-1},\ (dX/dt)_{i-1},\ (dU/dt)_{i-1},\ (dP/dt)_{i-1},\ (d\rho/dt)_{i-1},\ (dT/dt)_{i-1})$, $(X_i,\ \rho_i,\ (dX/dt)_i,\ (dU/dt)_i,\ (dP/dt)_i,\ (d\rho/dt)_i,\ (dT/dt)_i)$. Тогда прогноз в точке $i+1$:

$$X'_{i+1} = X_{i-1} + 2\Delta t\left(\frac{dX}{dt}\right)_i \tag{2.55}$$

$$T'_{i+1} = T_{i-1} + 2\Delta t\left(\frac{dT}{dt}\right)_i \tag{2.56}$$

$$\rho'_{i+1} = \rho_{i-1} + 2\Delta t\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_i \tag{2.57}$$

$$\left(\frac{dU}{dt}\right)'_{i+1} = 3\left(\frac{dU}{dt}\right)_i - \frac{2}{\Delta t}(U_i - U_{i-1}) \tag{2.58}$$

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)'_{i+1} = 3\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_i - \frac{2}{\Delta t}(\rho_i - \rho_{i-1}) \tag{2.59}$$

После вычисления X'_{i+1} и $-\left(\frac{dU}{dt}\right)'_{i+1} + \frac{P'_{i+1}}{\rho^2_{i+1}{}'}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)'_{i+1}$ можно рассчитать модель звезды (с только что полученным профилем X'_{i+1}). Эта модель дает ρ''_{i+1}, $(dX/dt)''_{i+1}$, T''_{i+1}.

Вычисляется коррекция:

$$X_{i+1} = X_i + \frac{\Delta t}{2}\left[\left(\frac{dX}{dt}\right)_i + \left(\frac{dX}{dt}\right)''_{i+1}\right] \tag{2.60}$$

$$\left(\frac{dU}{dt}\right)_{i+1} = -2\left(\frac{dU}{dt}\right)_i + \frac{1}{2\Delta t}(-U_{i-1} - 4U_i + 5U''_{i+1}) \tag{2.61}$$

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{i+1} = -2\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_i + \frac{1}{2\Delta t}(-\rho_{i-1} - 4\rho_i + 5\rho''_{i+1}) \tag{2.62}$$

$$\left(\frac{dT}{dt}\right)_{i+1} = -2\left(\frac{dT}{dt}\right)_i + \frac{1}{2\Delta t}(-T_{i-1} - 4T_i + 5T''_{i+1}) \tag{2.63}$$

Так получаются профиль химического состава и "гравитационные члены" для модели $i+1$. Самой модели еще нет; она будет рассчитана на следующем шаге или может быть сшита отдельно.

В формулах (2.55–2.63) обозначение X_i есть не что иное, как функция $X_i(\mu)$. Операции над такими функциями (типа X_i+X_{i+1}) – это операции над таблично заданными функциями, и точность представления играет большую роль. После некоторых исследований было выбрано представление в виде кубических сплайнов на сетке из 500 точек, равномерно распределенных по μ. Это обеспечивает достаточную точность аппроксимации химического состава (при условии, что $X(\mu)$ – гладкая функция).

2.5. Тестирование кода

Использование методов интегрирования высокого порядка и малых шагов не гарантируют отсутствия ошибок в программе, включающей в себя около 300 килобайт текста. К счастью, нам представилась редкая возможность провести независимое тестирование, которое было предложено GONG Solar Model Group (Christensen-Dalsgaard 1988). Суть его заключалась в том, что все входные параметры фиксировались (в том числе и непрозрачность, уравнение состояния и т.д.), рассчитывался некий набор моделей (включавший в себя химически однородную модель начальной главной последовательности и проэволюционировавшую модель современного Солнца) и результаты разных групп авторов сравнивались (структурные переменные интерполировались на общую сетку и вычислялись разности). Конечно же, эта процедура не позволяет выявить, например, ошибки интерполяции таблиц уравнения состояния (для аккуратности сравнения использовались аналитические аппроксимации), но основные алгоритмы все же подвергаются весьма строгому тесту.

Один из отчетов GONG Model Team приведен в GONG Newsletter 17, где отмечается, что достигнуто согласие на уровне, близком к 10^{-5}, что является весьма хорошим показателем.

Глава 3.

Удельная энтропия вещества адиабатической части конвективной зоны

3.1. Основные элементы структуры Солнца: ядро, лучистая и конвективная зоны

Солнце находится в гидростатическом равновесии благодаря огромному давлению и температуре в его недрах. Температура фотосферы же сравнительно невысока, поэтому неизбежно в недрах Солнца должны существовать источники энергии: градиент температуры предполагает поток тепла и механизмы переноса. С одной стороны, теплопроводность газа весьма мала; с другой стороны – непрозрачность ионизованного газа велика. Считается, что энергия может переноситься из центра к поверхности двумя способами: диффузией квантов (лучистая теплопроводность) и конвекцией (см. главу 5). В свое время обсуждалась возможность существования слабовзаимодействующих массивных частиц (WIMP: weakly interacting massive particles; см., например, хороший обзор в (Faulkner, Gilliland 1985)) однако отсутствие доказательств не способствовало популярности идеи.

Поток энергии может быть описан градиентом температуры $gradT$. В теории внутреннего строения Солнца обычно используется другая величина – логарифмический градиент температуры по логарифму давления $\nabla \equiv d\log T/d\log P$. Он участвует также в критерии конвективной устойчивости Шварцшильда (1.9). Рассмотрим его поведение в типичной модели Солнца (рис. 3.1 и 3.2). В лучистом ядре Солнца (при $0 < r/R < 0.3$, $7 < \lg T < 7.2$) температурный градиент определяется непрозрачностью и темпами выделения энергии:

$$\nabla = \nabla_{rad} = \frac{3}{64\pi\sigma G}\frac{\kappa L_r P}{T^4 M_r}. \tag{3.1}$$

В недрах Солнца (при практически полной ионизации) он значительно меньше адиабатического. Интересно, что в моделях молодого Солнца (в начале эволюционного трека) в центре лучистый градиент весьма близок к адиабатическому, т.е. не исключается возможность небольшого конвективного ядра! Оно, однако, достаточно мало и быстро исчезает, не успев оказать сколько-нибудь заметного влияния на эволюцию.

В лучистой зоне (при $0.3 < r/R < 0.7$, $6.3 < \lg T < 7$) энерговыделения нет ($L_r = L = const$), и градиент определяется непрозрачностью вещества:

$$\nabla = \nabla_{rad} = \frac{3L}{64\pi\sigma G}\frac{\kappa P}{T^4 M_r} \tag{3.2}$$

С падением плотности и температуры из центра к поверхности Солнца падают степени ионизации элементов тяжелее гелия и растет непрозрачность. В зоне частичной ионизации водорода и гелия уменьшается адиабатический градиент ∇_{ad}. Примерно при 2 млн. К ($\lg T = 6.3$) непрозрачность становится настолько большой, что возникает конвекция. Большая часть конвективной зоны ($0.7 < r/R < 0.99$, $4.3 < \lg T < 6.3$) стратифицирована адиабатически, т.е. градиент практически равен ∇_{ad}. Это происходит вследствие того, что конвекция чрезвычайно эффективна в этих слоях – вещество имеет большую плотность и, следовательно, большую теплоемкость: конвективные течения способны переносить большие потоки энергии. Ни характер теории конвекции, ни непрозрачность не влияют здесь на строение Солнца, т.к. градиент в любом случае равен адиабатическому, который определяется лишь термодинамикой (разумеется, если непрозрачность была бы очень низка, то она играла бы роль – конвекция прекратилась бы).

Во внешних слоях конвективной зоны градиент температуры определяется деталями теории конвекции. Здесь отличие градиента температуры от адиабатического заметно, и лучистый перенос вносит заметную долю в поток энергии. Соотношение между лучистым и конвективным переносом определяет теория конвекции. В самых ранних моделях Солнца (в 1950-е гг.) существование этой зоны не учитывалось вовсе из-за отсутствия какой-либо теории конвекции; вся конвективная зона считалась стратифицированной адиабатически. Сейчас для описания конвективного переноса обычно используется феноменологическая теория длины пути перемешивания, разработанная Böhm-Vitense (1958), хотя есть попытки предложить альтернативные теории (например, Canuto, Mazzitelli 1991).

В дальнейшем в соответствии с этим делением по механизмам генерации и переноса энергии будем говорить о трех частях модели: 1) *ядре*, в котором происходит энерговыделение и в котором химический состав меняется из-за выгорания водорода; строение ядра зависит от параметров ядерных реакций и непрозрачности; 2) *лучистой зоне*, где энергия переносится излучением (там нет выделения энергии), строение ее определяется непрозрачностью; 3) *оболочке* (конвективной зоне и вышележащих слоях).

Конвективная оболочка составляет примерно треть солнечного радиуса. Таким образом, значительная часть Солнца устроена очень просто: T, P, ρ связаны законом

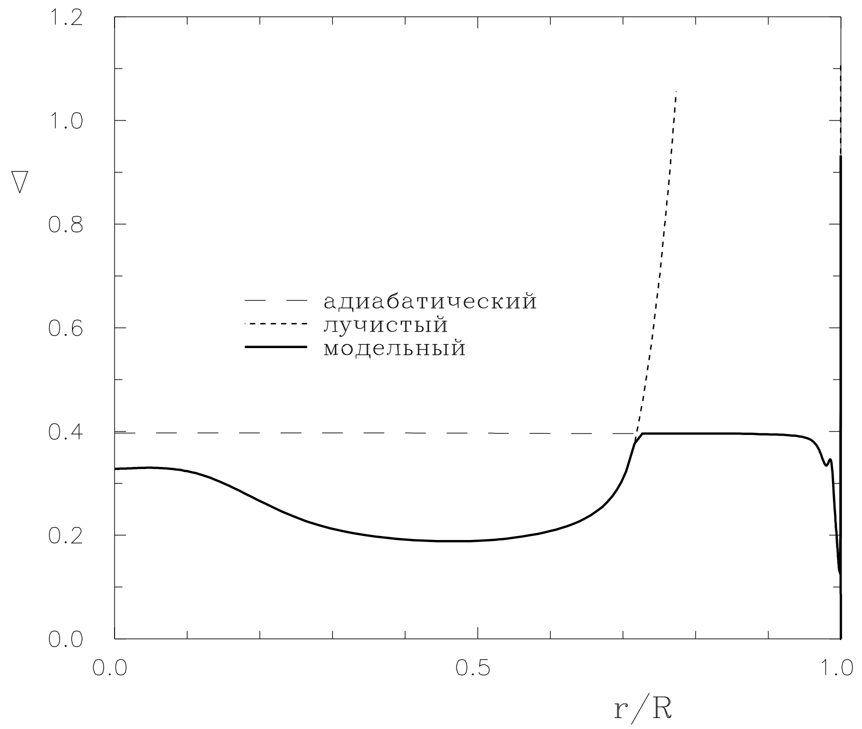

Рис 3.1. Градиент температуры $\nabla = d\log T / d\log P$ *в стандартной модели Солнца*

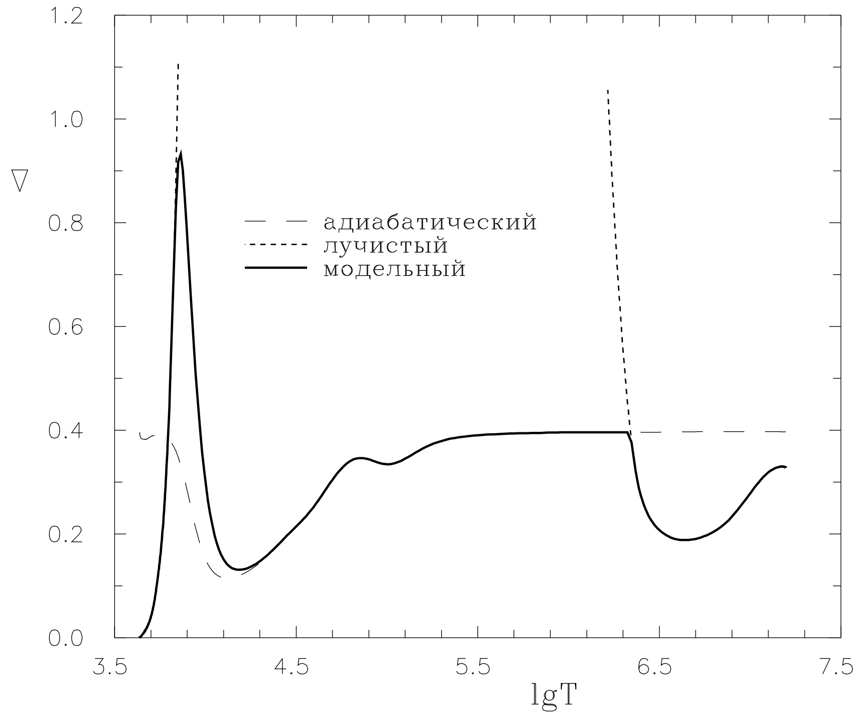

Рис 3.2. Градиент температуры $\nabla = d\log T / d\log P$ *в стандартной модели Солнца*

адиабаты. Проблема в том, что мы не знаем, какая это адиабата. Но тем не менее этот факт означает, что с точки зрения теории внутреннего строения вся конвективная зона и области выше характеризуются очень небольшим набором величин: химическим составом (в простейшем случае содержанием гелия Y) и параметром адиабаты. Поясним более подробно.

Представим себе, что Солнце разделено на несколько концентрических частей: а) ядро, б) лучистая зона, в) зона адиабатической конвекции, г) область сверхадиабатической конвекции плюс атмосфера. Значения основных структурных переменных (r, M_r, ρ, T, L_r) должны совпадать на границах частей. Что произойдет, если изменить теорию конвекции или строение атмосферы? На нижней границе части г) изменятся переменные, что может повлечь за собой изменение остальных частей модели. Как изменятся эти переменные? Светимость L_r останется постоянной, т.к. в этих слоях нет источников энергии. Масса и радиус этих слоев малы (см. ниже), и не могут измениться заметно (конечно, если не пересматривать теорию конвекции коренным образом). Остаются лишь температура и плотность, причем они выходят на некую адиабату (в адиабатической части конвективной зоны). Перепад этих величин (температуры и плотности) от точки "поверхности" Солнца (места задания внешних граничных условий) до адиабаты и задается теорией конвекции и строением атмосферы. Однако современный подход к расчету солнечных моделей ставит здесь все с ног на голову: поскольку мы не знаем параметров конвективного переноса, будем подбирать их так, чтобы получить требуемый перепад плотности. Благодаря этому получается, что модель современного Солнца практически не зависит от строения самых внешних слоев. Единственной значимой величиной является перепад плотности между точкой внешних граничных условий и точкой перехода конвекции в адиабатический режим.

Отметим, что область, где градиент температуры ∇ *действительно* отличается от лучистого (скажем, более чем на 1%), очень мала – 0.005-я доля радиуса и $9 \cdot 10^{-8}$ доля массы для стандартной модели. Следовательно, вариации теории конвекции (а также строения атмосферы) заметно изменить радиус и массу модели не в состоянии (если, конечно, это не радикальный пересмотр теорий). Для внутреннего строения эта тонкая "скорлупа" Солнца никакой роли не играет, хотя в ней сосредоточены все поверхностные явления и все особенности теории конвекции.

Выберем параметр, которым будем характеризовать адиабату. На адиабате постоянна удельная энтропия вещества S. Зная химический состав (содержание гелия Y) и характеристику адиабаты (удельную энтропию вещества S), можно получить модель адиабатической части конвективной зоны (если игнорировать внешние слои): положение адиабаты на плоскости (ρ, T) известно. Мы знаем, что где-то на ней есть точка, приблизительно соответствующая $r = R$, $M_r = M$, $L_r = L$. (см. рис. 3.3). Эта точка

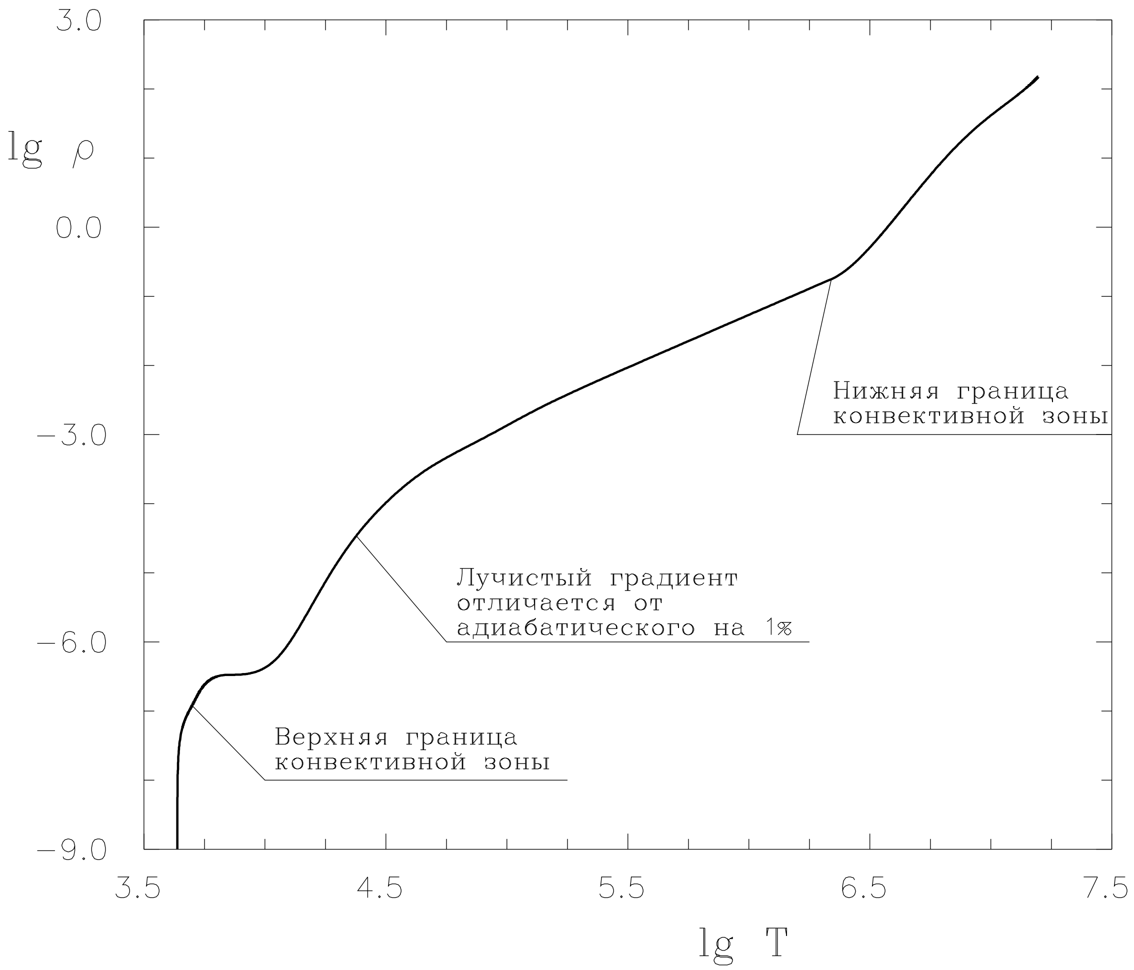

Рис. 3.3. Температура и плотность в модели современного Солнца. Обратите внимание на то, что бо́льшая часть кривой – адиабата.

примерно соответствует видимой поверхности Солнца, т.е. $T = T_{eff}$. Разумеется, это весьма грубое приближение, и при расчете моделей в этой работе оно не использовалось. Оно, однако, демонстрирует, что двух параметров в целом достаточно для описания конвективной оболочки Солнца.

3.2. Удельная энтропия вещества в солнечной модели

Из принципа адиабатной недостижимости, на котором часто строят современную термодинамику следует, что существует некоторые функции состояния, которые не изменяются при равновесных адиабатных процессах. Одна из таких функций – энтропия S, определяемая как

$$dS = \delta Q/T, \tag{3.3}$$

где T – температура, а δQ – элементарное количество теплоты, полученное телом в неком равновесном процессе, dS – изменение энтропии в этом равновесном процессе (имеется в виду бесконечно малые δQ и dS, так что температуру можно считать постоянной). С учетом первого начала термодинамики эту формулу можно переписать так:

$$dS = \frac{1}{T}(dU + PdV). \tag{3.4}$$

То, что энтропия является функцией состояния, означает, что для данного тела (скажем, одного моля газа) энтропия есть однозначная функция температуры и плотности. Уравнение (3.4), однако, не фиксирует нуль-пункта. Третье начало термодинамики утверждает, что энтропия всех равновесных систем стремится к одной и той же величине (обычно полагаемой равной нулю) при стремлении температуры T к нулю (абсолютному). Это мало помогает при расчете солнечных моделей, поскольку уравнение состояния вещества при низких температурах неизвестно.

В статистической физике показывается, что

$$S = k \ln W \tag{3.5}$$

(уравнение Больцмана-Планка); здесь W – статистический вес (число возможных динамических состояний системы), k – постоянная Планка. Использование этой формулы для расчета энтропии возможно лишь в том случае, когда уравнение состояния содержит необходимые для этого данные, а именно статистические суммы Z, из которых можно получить свободную энергию F:

$$F = -kT \ln Z, \tag{3.6}$$

и далее энтропию:

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V. \tag{3.7}$$

Обычно эти величины недоступны, однако статистические формулы – единственный способ согласованно рассчитывать энтропию при разных химических составах.

В предыдущем параграфе удельная энтропия вещества предлагалась в качестве характеристики адиабаты. Слово "удельная" здесь означает, что берется энтропия некой фиксированной массы вещества – в данном случае одного грамма (энтропия – аддитивная величина, в отличие от, например, температуры). Чтобы использовать удельную энтропию при анализе моделей Солнца, необходимо иметь возможность ее рассчитывать. Формула (3.4) легко преобразуется в

$$S(T,\rho) - S(T_0,\rho_0) = \int_{T_0,\rho_0}^{T,\rho} \frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)_T - \frac{P}{\rho^2}\right] d\rho + \frac{C_V dT}{T}. \tag{3.8}$$

В этом выражении U – внутренняя энергия на единицу массы, C_V – удельная теплоемкость при постоянном объеме, S – энтропия на единицу массы. Эта формула не учитывает того, что вещество может иметь разный химический состав: энтропия грамма водорода отличается от энтропии грамма гелия! Поэтому нельзя просто выбрать один нуль-пункт удельной энтропии для любых химических составов – классическая термодинамика не дает возможности перейти от одного содержания водорода к другому.

В наших моделях мы использовали уравнение состояния, рассчитанное Д. Михаласом, Д. Хаммером и В. Даппеном, (Mihalas, Däppen, Hummer 1988; Hummer, Mihalas 1988; Däppen *et al.* 1988); его принято обозначать по первым буквам фамилий авторов MHD. Таблицы MHD были любезно предоставлены В. Даппеном. Кроме того, В. Даппен предоставил значения энтропии в точках с одинаковыми $T_0 = 15$ млн. K, $\rho_0 = 150$ г/см^3, но разными химическими составами (содержанием водорода X; см. таблицу 3.1).

X	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
S/R_g	10.31805	10.89200	11.45699	12.01385	12.56321
X	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75
S/R_g	13.10553	13.64113	14.17022	14.69289	15.20910

Таблица 3.1. Удельная энтропия вещества при $T_0 = 15$ млн. K, $\rho_0 = 150$ г/см^3 для уравнения состояния MHD. R_g – универсальная газовая постоянная.

Аналитическая аппроксимация этих данных имеет вид

$$S_0/R_g = -3.426523X^2 + 12.36082X + 6.739551 \text{ моль/г} \tag{3.9}$$

(ее точность – около 10^{-3} для $X \in [0.30, 0.75]$). Имея значение энтропии в точке $(T_0,\, \rho_0)$, по формуле (3.8) получаем энтропию в требуемой (интегрируя уравнение (3.8) вдоль произвольного пути от $(T_0,\, \rho_0)$ до $(T,\, \rho)$).

Рассмотрим поведение энтропии в типичной модели Солнца. Легко понять, что если при равенстве адиабатического ∇_{ad} и структурного ∇ градиентов энтропия постоянна, то при их неравенстве она будет расти или падать по модели. Это подтверждает и формула, приведенная в работе Ulrich, Rhodes 1977:

$$\Delta S = \int C_P(\nabla - \nabla_{ad})\, d\ln P \tag{3.10}$$

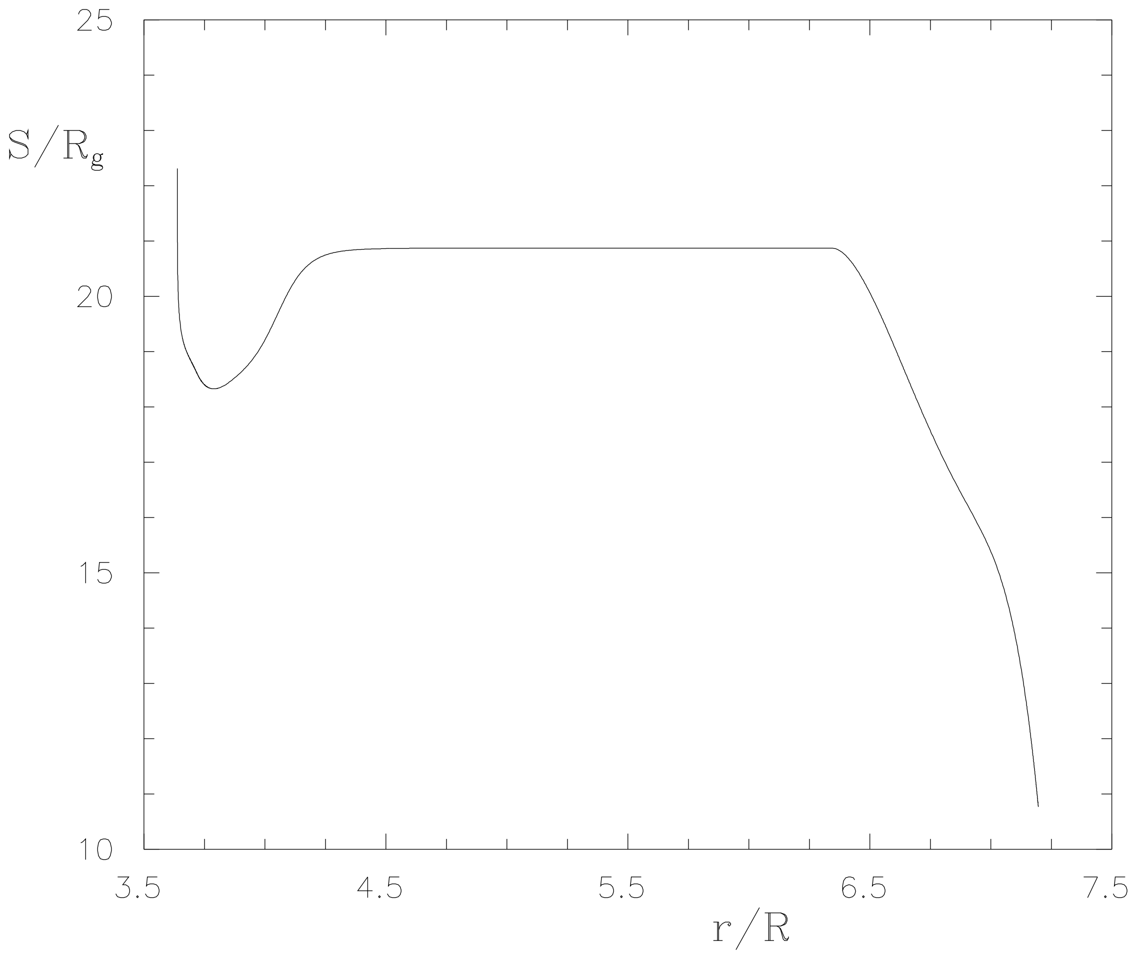

Рис 3.4. Поведение удельной энтропии вещества S/R в стандартной модели Солнца

Таким образом, при отсутствии конвекции энтропия падает с увеличением давления, при наличии сверхадиабатической конвекции – растет. В зоне адиабатической конвекции удельная энтропия вещества постоянна. Рис. 3.4 подтверждает описанную картину.

3.3. Параметризация конвективной оболочки: почему S вместо α?

Как уже упоминалось в главе 3, стандартная солнечная модель характеризуется двумя параметрами калибровки – начальным химическим составом и параметром теории конвекции α, управляющим величиной градиента температуры во внешних конвективных слоях. Выбор именно этих величин обусловлен в значительной мере историческими и техническими причинами, поскольку после их задания эволюционный трек может быть последовательно рассчитан. Практически все современные работы по моделированию Солнца приводят эти величины в качестве основных характеристик моделей. Однако, если определение содержания гелия представляет самостоятельный смысл и интерес, то информация, содержащаяся в параметре ТДПП α, по существу не используется. Между тем для спецификации модели необходимы оба параметра, причем второй имеет даже большее значение. При наличии протяженной конвективной оболочки (как у Солнца), где вещество стратифицировано адиабатически, требование нулевых внешних граничных условий ($T \to 0$, $\rho \to 0$) недостаточно, поскольку оно выполняется на любой адиабате. Поэтому в модели должна быть специфицирована энтропия конвективной адиабаты, как естественный физический параметр строения (в ранних работах по моделированию Солнца вместо энтропии использовались другие величины, такие как константа политропного закона, однако ясно, что любая величина, сохраняющаяся на адиабате, есть функция энтропии). Параметр конвекции, определяющий градиент температуры в области сверхадиабатической конвекции, и, тем самым, выбор соответствующей адиабаты, может рассматриваться лишь как технический параметр, поскольку его величина зависит не только от принятой для расчетов теории конвекции и ее внутренних параметров, но и от строения атмосферы, в частности, используемой в ней непрозрачности, в зависимости от которой изменяется плотность на верхней границе конвективной зоны.

В действительности использование параметра конвекции как результирующего параметра модели не только делает невозможным сравнение стандартных солнечных моделей, но и является физически неадекватным в задаче о ССМ. Как подробно обсуждалось в §3.1 и Antia, Chitre 1995, для построения солнечной модели необходимо сохранение именно энтропии солнечной оболочки, тогда как структура самых внешних слоев может быть совершенно различной. Это означает, что строение внешних конвективных слоев не может быть определено в рамках задачи о ССМ, поскольку в ней определяется лишь толщина области сверхадиабатической конвекции, и, с очень большой относительной неопределенностью, масса этих слоев.

Глава 4.

Непрозрачность вещества и модель внутреннего строения Солнца

Монохроматический коэффициент поглощения (точнее, экстинкции) вещества может быть рассчитан путем суммирования всех процессов, ведущих к поглощению и рассеянию излучения:

$$\alpha_\nu = \sum_i N_i \sigma_i(\nu) E_i, \tag{4.1}$$

где N_i – концентрация частиц типа i, $\sigma_i(\nu)$ – сечение процесса (поглощения или рассеяния), E_i – фактор учета индуцированного излучения: $E_i = 1 - exp(-h\nu/kT)$ для процессов поглощения, $E_i = 1$ для рассеяния. Коэффициент поглощения по Росселанду (или *непрозрачность*) α определяется гармоническим средним

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\pi}{4\sigma T^3} \int_0^\infty \frac{1}{\alpha_\nu} \frac{dB_\nu(T)}{dT} d\nu, \tag{4.2}$$

входящим в условие лучистого равновесия (4.3) (здесь $B_\nu(T)$ – формула Планка). Столь экзотический выбор усреднения по частотам объяснен ниже. Таким образом, расчет величины непрозрачности сводится главным образом к расчету концентраций частиц N_i и сечений $\sigma_i(\nu)$. В первом приближении расчет концентраций частиц относится к задаче расчета уравнения состояния, расчет сечений – к атомной физике.

Непрозрачность κ входит в уравнения строения звезд как коэффициент в формуле для лучистого переноса энергии:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{T}{P} \frac{3L_r P\kappa}{16\pi ac T^4 G M_r} \frac{dP}{dr} \tag{4.3}$$

(средняя дробь есть не что иное как лучистый градиент температуры ∇_{rad}). Высокое значение непрозрачности означает, что для поддержания потока энергии требуется большой градиент температуры. В идеальном случае бесконечно высокой теплопроводности градиент температуры вовсе отсутствует. Если в веществе нет источников энергии (и нет потока тепла), как, например, в гелиевых ядрах старых звезд главной последовательности, то вещество изотермично; величина непрозрачности не имеет значения. Большой поток энергии при высокой величине непрозрачности требует крутого градиента температуры для переноса тепла лучистым путем. Конвективный перенос (при наличии вещества достаточной плотности и теплоемкости) создает градиент температуры

$$\nabla_{ad} \equiv \left(\frac{\partial \log T}{\partial \log P} \right)_S . \tag{4.4}$$

Если лучистый перенос требует более высокого градиента температуры, энергия отчасти переносится путем конвекции.

4.1. Краткая история расчетов коэффициента поглощения солнечной плазмы

Первые попытки расчета солнечных моделей (см. §1.5), имевшие место в конце прошлого века и начале нынешнего, основывались на том предположении, что энергия в недрах звезд переносится конвекцией. Важность лучистого переноса одним из первых отметил Шустер (Schuster 1903, 1905); позже Карл Шварцшильд рассматривал лучистый перенос в атмосферах звезд (Schwarzchild, 1906). Теория Шварцшильда была искусно использована Эддингтоном (1926), который впервые показал, что лучистый перенос необходимо принимать в рассмотрение при изучении внутреннего строения звезд.

Примерно в то же время Крамерс (Kramers 1923), используя полуклассические методы, получил формулы для коэффициента поглощения. Крамерс рассматривал свободно-свободные переходы (рассеяние в электрическом поле атома) и связанно-свободные переходы (фотоионизация). В 1924 г. Росселанд получил формулу для усреднения коэффициента поглощения по частотам, которая дает средний коэффициент поглощения (непрозрачность), присутствующий в модели Эддингтона. Непрозрачность, рассчитанная по формулам Крамерса, оказалась очень низкой – в 10 раз меньше, чем требовалось в модели Эддингтона.

В те времена, однако, считалось, что звезды в значительной степени состоят из тяжелых элементов. Например, в 1931 году Росселанд пишет, что "смесь, состоящая из 20 весовых частей водорода и 80 весовых частей железа, дает нужную величину светимости. Мы не можем сказать, имеет ли место на звездах такое же положение вещей. Правда, существует достаточно оснований, чтобы допустить, что атмосферы звезд состоят главным образом из водорода." (о Капелле; Росселанд 1936, стр. 93). Полагали также, что водород должен диффундировать к поверхности, оставляя тяжелые элементы в центре звезды, но в целом никто не пытался строить неоднородные модели звезд.

В 1932 г. Стремгрен продолжил теоретическую работу в этом направлении, введя в рассмотрение квантовомеханические сечения для электронов в кулоновском поле

(Strömgren 1932, 1933). В 1940 г. Морзе получил поправки за экранирование кулоновского поля и ионизацию давлением. Были учтены также атомы с более чем одним электроном, и введен так называемый "гильотинный множитель" (Morse 1940). В 1955 г. Келлер и Мейерот (Keller, Meyerott 1955) рассчитали первые таблицы для 13 вариантов химического состава (смесей).

Все эти расчеты учитывали свободно-свободные, связанно-свободные переходы и электронное рассеяние. Поглощение в линиях (связанно-связанные переходы) не учитывалось, и это обычно оправдывалось тем, что при усреднении по формуле Росселанда играет роль эквивалентная ширина, а она для большинства линий невелика. Этот неучет вел, разумеется, к некоторому занижению непрозрачностей; однако без вычислительной техники расчет профилей линий практически невозможен.

В начале 60-х появилась возможность использовать компьютеры, и настала эра расчетов, проводимых в рамках больших многолетних проектов. Исторически первой начала работать над таблицами непрозрачностей группа исследователей из Лос-Аламосской лаборатории (первым руководителем проекта был A.N.Cox). Первые работы группы были опубликованы в 1962 г. (Cox, Stewart 1962); первое подробное описание проекта появилось в Cox, Stewart 1965.

В 1970 г. Лос-Аламосская группа опубликовала обширные таблицы непрозрачностей для трех наборов смесей (Cox, Stewart 1970). Эти таблицы широко использовались для расчетов эволюции Солнца и звезд благодаря своей полноте. Эти таблицы затем несколько раз подвергались ревизии; вариант 1976 г. (Cox, Tabor 1976) иногда используется даже сейчас. Одним из больших успехов группы был выпуск Los Alamos Opacity Library (LAOL, Huebner *et al.* 1977). Это совокупность данных, позволяющих рассчитывать непрозрачность для произвольного химического состава (относительного содержания элементов тяжелее гелия – *смеси*). Многие группы исследователей для своих целей рассчитывали свои варианты таблиц; в результате большинство моделей, полученных с использованием "таблиц LAOL", никак нельзя сравнить между собой, т.к. они основаны на отличающихся таблицах. Были опубликованы также наборы таблиц непрозрачностей для некоторых смесей (Weiss, Keady, Magee 1990).

В середине 80-х второй проект по расчету непрозрачностей был начат в Lawrence Livermore National Laboratory; руководители проекта – F.J.Rogers, C.A.Iglesias, B.G.Wilson. Название их компьютерной программы OPAL обычно используется и как обозначение таблиц, рассчитанной этой группой. Уравнение состояния в этой программе основано на так называемой "физической картине": сначала рассматривается смесь электронов и ядер, затем, в зависимости от условий, некоторые электроны переходят в связанное состояние, образуя ионы. Эти ионы подвергаются воздействию плазмы и их волновые функции рассчитываются с учетом потенциалов плазмы. Первые численные данные были опубликованы в 1987 г. (Iglesias *et al.* 1987) и показали, что таблицы, рассчитанные этим методом, содержат значения, заметно бо́льшие, чем таблицы LAOL. В 1991 г. они опубликовали данные, пригодные для расчета модели Солнца (Iglesias, Rogers 1991); эта же статья содержит довольно подробный анализ непрозрачностей в солнечных моделях. Полные таблицы OPAL приведены в работе Rogers, Iglesias 1992.

Наконец, третий большой проект был начат в 1984 году. Он основан на уравнении состояния MHD и называется Opacity Project (OP; Seaton *et al.* 1994). В нем принимают участие исследовательские группы из Франции, Германии, Великобритании, Соединенных Штатов и Венесуэлы. Главой проекта считается M.J.Seaton. Уравнение состояния основано на "химической картине": рассматривается совокупность электронов и ионов; ионизационное равновесие находится путем минимизации свободной энергии. Цели проекта, помимо расчета таблиц росселандовых значений коэффициента поглощения, включают расчет уровней энергии, фотоионизационных сечений рассеяния и др. Основные усилия направлены, однако, на улучшение значений непрозрачностей для звездных оболочек ($\rho < 10^{-2}$ г/см^3); как отмечает сам M.Seaton, "для более глубоких слоев предпочтительны таблицы OPAL". Сравнительно недавно (в апреле 1995 г.) таблицы непрозрачностей стали доступны всем для использования.

4.2. Модели Солнца с различными таблицами непрозрачностей

Используя предположения, описанные в главе 1 и технику расчета моделей (глава 2) был рассчитан набор стандартных моделей Солнца, отличающихся лишь таблицами непрозрачностей. Здесь и далее применяются следующие обозначения для таблиц:
1) **CS70** – таблицы Лос-Аламосской группы; одни из первых опубликованных (Cox, Stewart 1970);
2) **CT76** – более поздний (Cox, Tabor 1976) вариант CS70; не содержат данных для низких содержаний водорода ($X < 0.7$) и вследствие этого малопригодны для расчета солнечной эволюции. В моделях, рассчитанных в этой работе, использовалась экстраполяция по X;
3) **BU88** – вариант таблиц LAOL из (Bahcall, Ulrich 1988), относительное содержание тяжелых элементов (смесь) по Grevessee 1984. Таблицы несколько неполны (требуется экстраполяция) вблизи значений, примерно соответствующих нижней границе солнечной конвективной зоны. Согласно работе Faulkner, Swenson 1992, это должно приводить к завышению глубины конвективной зоны в солнечных моделях. Кроме того, в атмосфере и внешних слоях конвективной зоны использовались таблицы CT76, т.к. работа Bahcall, Ulrich 1988 не содержит нужных данных. Переходная область лежит в районе 0.8–1.0 млн. K (т.е. в нижней части конвективной зоны, где значение непрозрачности

не влияет на модель).
4) **WKM** – вариант таблиц LAOL из (Weiss, Keady, Magee 1990), смесь очень близка к использованной в CT76 (таблицы M4 в Weiss, Keady, Magee 1990);
5) **IR91** – первые опубликованные таблицы OPAL (Iglesias, Rogers 1991), смесь по Grevessee 1984, как в BU88. Интерполяционная сетка, приведенная в Iglesias, Rogers 1991, совпадает с использованной в BU88, но таблицы были дополнены данными из Faulkner, Swenson 1992, что позволило избежать экстраполяции. В в атмосфере и внешних слоях конвективной зоны – то же, что и для BU88.

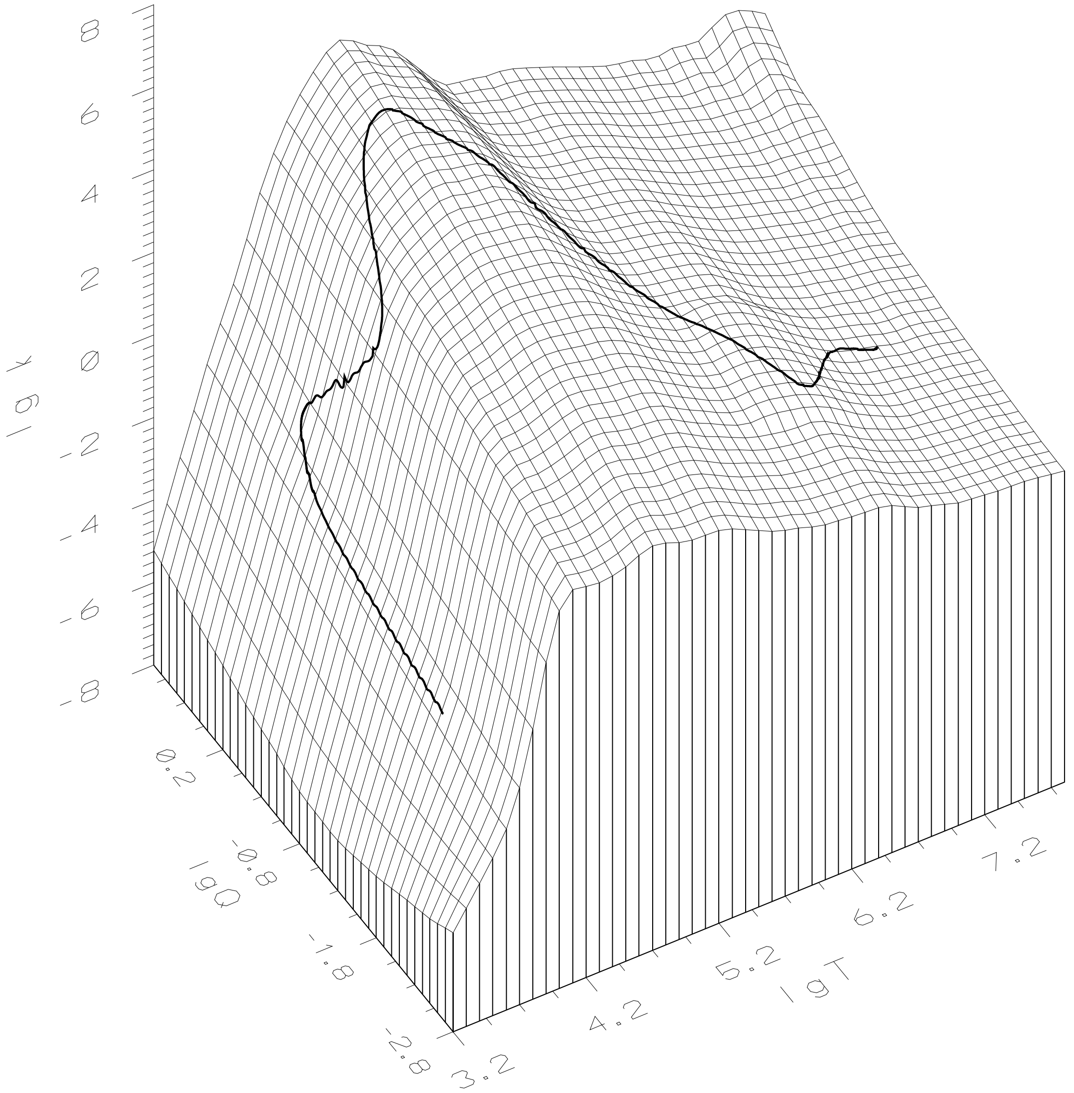

Рис. 4.1. Непрозрачность OPAL IR91 при X=0.65. Линия отражает условия внутри Солнца.

Рис. 4.2 демонстрирует, как отличаются между собой вышеуказанные таблицы. Чтобы сделать сравнение более осмысленным и наглядным, приведены значения непрозрачности для (T, ρ, X), взятых из реальной стандартной модели Солнца. Здесь κ_0, на которую разделены значения непрозрачности, представляет собой несложное аналитическое выражение из Christensen-Dalsgaard 1988:

$$\begin{aligned} 1/\kappa_0 &= 1/\kappa_e + 1/\kappa \\ \kappa_e &= 1.6236784 \cdot 10^{-33} \rho^{0.407895} T^{9.28289} \\ \kappa_i &= 7.1548412 \cdot 10^{13} \rho^{0.138316} T^{-1.97541} \end{aligned} \tag{4.5}$$

Удивительно, что столь простая по структуре формула аппроксимирует непрозрачность в недрах Солнца с погрешностью всего лишь около 50% (впрочем, различия между таблицами тоже вполне укладываются в этот диапазон). Непрозрачность в конвективной зоне не влияет на модель (см. гл. 4), поэтому график ограничен ядром Солнца и лучистой зоной. Очень старые таблицы CS70 содержат низкие величины непрозрачности, и с течением времени все более новые таблицы содержат все бо́льшие величины. Одно из предлагавшихся объяснений – рост вычислительной мощности доступных компьютеров и включением в рассмотрение все большего числа линий поглощения! Интересно, что таблицы WKM и IR91 отличаются фактически лишь в лучистой зоне, а в ядре Солнца приблизительно одинаковы.

В таблице 4.1 приведены параметры стандартных моделей Солнца, рассчитанных с разными таблицами непрозрачности. Еще раз подчеркнем, что единственное отличие моделей друг от друга – таблицы непрозрачностей.

Первая особенность, бросающаяся в глаза – большое α в модели CS70. Это – следствие значительного отличия CS70 от остальных таблиц в атмосфере; впрочем, на модель это существенного влияния не оказывает (α является калибровочным параметром; см. §3.1). Начальное содержание водорода X_0 одинаково у моделей WKM и IR91; ниже будет показано, что это является следствием одинаковости этих таблиц в ядре Солнца. Низкий поток хлорных нейтрино в модели CS70 обусловлен низкой температурой в центре (вследствие низких значений непрозрачности; таким образом, ситуация с нехваткой нейтрино только ухудшается с расчетом все новых и новых таблиц). Скорости захвата для галлиевого и индиевого детекторов обнаруживают гораздо меньшую чувствительность к структуре модели: бо́льшая часть потока обусловлена нейтрино, рождающимися в $p-p$ реакции, число которых определяется светимостью Солнца. Глубина конвективной зоны варьируется от $0.263 R_\odot$ (WKM) до $0.281 R_\odot$ (IR91).

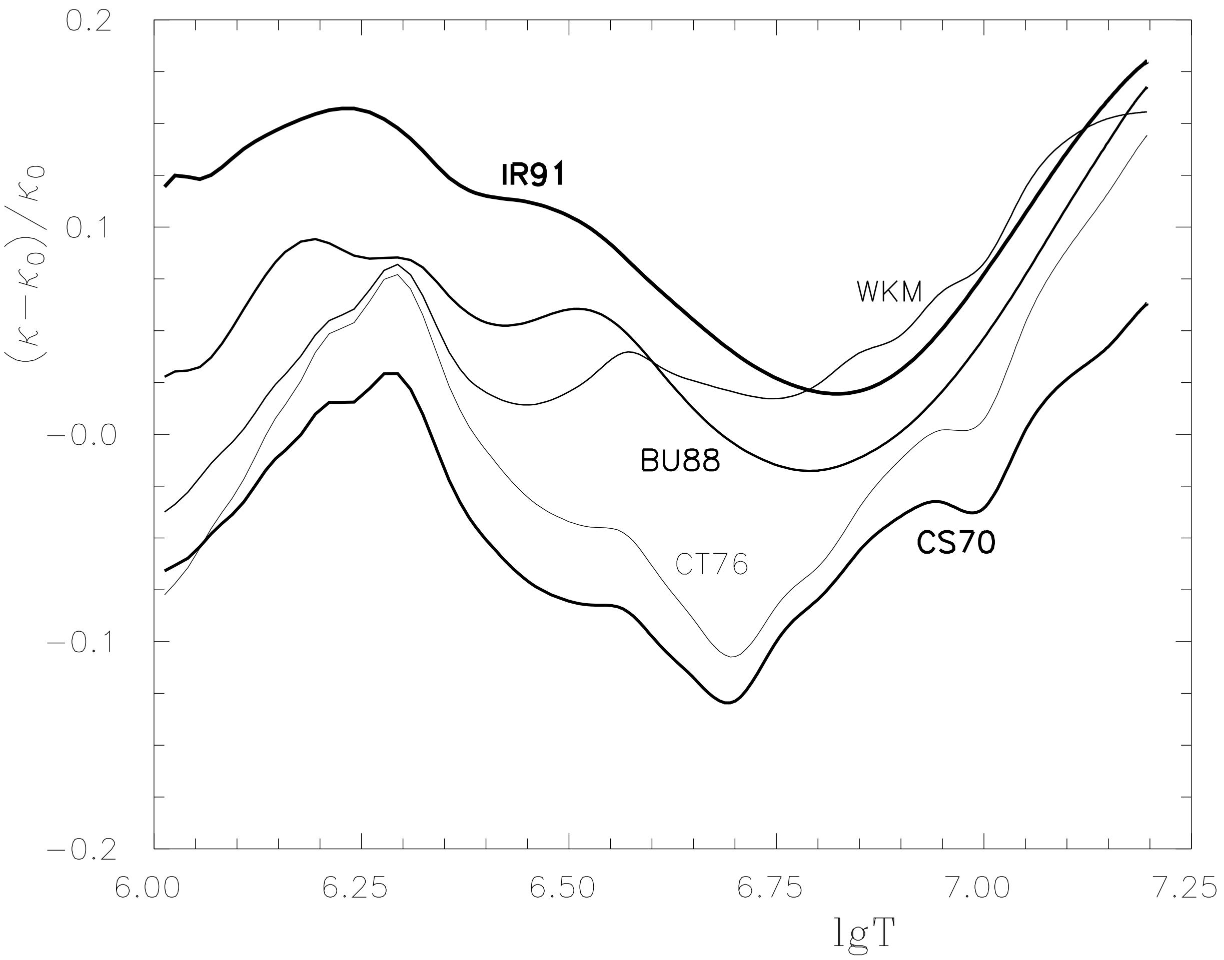

Рис. 4.2. Величина непрозрачности в условиях, характерных для модели современного Солнца. Разность логарифмов непрозрачности и аналитической формулы (4.5) отложена как функция логарифма температуры. Точки (T, ρ, X) для расчета непрозрачности взяты из профиля стандартной модели.

4.3. Влияние величины непрозрачности на содержание гелия и удельную энтропию вещества конвективной зоны

Как уже отмечалось в §3.1, непрозрачность вещества на Солнце не везде влияет на строение звезды. В подавляющей части конвективной зоны роль лучистого переноса ничтожна. В сверхадиабатической части конвективной зоны и атмосфере это не так, и непрозрачность входит как важная составная часть в расчеты. Два факта, однако, сильно уменьшают влияние непрозрачности этих слоев на внутреннее строение Солнца. Во-первых, эти слои имеют малую массу и толщину (по сравнению с нижележащей конвективной зоной). Даже при очень больших вариациях строения атмосферы

Модель	Таблицы	α	T_c, K	ρ_c, см/г^3	Y	S/R
350-0109	CS70	4.6237	15.054	149.41	.23196	21.725
350-0108	CT76	1.6370	15.348	146.11	.24591	21.550
350-0107	BU88	1.6509	15.576	149.44	.26616	21.110
350-0106	WKM	1.9645	15.623	149.64	.28025	21.051
350-0105	IR91	1.6288	15.717	150.84	.28029	20.873

Модель	Таблицы	H_{bcz}/R	T_{bcz}, K	$F_{Cl^{37}}$	$F_{Ga^{71}}$	$F_{In^{115}}$
350-0109	CS70	.26981	1.9984	4.005	106.614	577.694
350-0108	CT76	.27122	2.0351	5.490	113.535	591.325
350-0107	BU88	.27535	2.1084	7.160	121.351	606.760
350-0106	WKM	.26309	2.0025	7.978	125.453	615.121
350-0105	IR91	.28098	2.1907	8.508	127.445	618.577

Таблица 4.1. Характеристики стандартных моделей Солнца с различными таблицами непрозрачностей. В первой части таблицы приведены коэффициент теории длины пути перемешивания (α), температура в центре, плотность в центре, начальное содержание гелия, удельная энтропия конвективной зоны. Вторая часть содержит глубину конвективной зоны, температуру на дне конвективной зоны и ожидаемые потоки для трех типов детекторов нейтрино.

общий вклад ее в интегралы массы и радиуса не может быть значительным. Во-вторых, при расчете модели Солнца параметр конвекции α подбирается таким образом, чтобы удовлетворить современным значениям радиуса и светимости; фактически этот процесс есть в некотором смысле подбор α к непрозрачности в сверхадиабатической части конвективной зоны. Следовательно, эффект от изменения непрозрачности в некоторой степени нейтрализуется несовершенством наших методов расчета моделей Солнца. Оба эти факта отмечались и в §3.1.

Итак, внутренность Солнца разделилась на три части – ядро, в котором генерируется энергия, лучистая зона, через которую энергия переносится излучением, и конвективная зона, где энергия переносится конвекцией. Непрозрачность для модели внутреннего строения – это непрозрачность в ядре и лучистой зоне. Рассмотрим, как модель зависит от нее. В данной главе в качестве характеристик модели принимаются содержание гелия вне энерговыделяющего ядра Y и удельная энтропия адиабатической части конвективной зоны S, как предлагается в главе 3.

Чтобы исследовать соотношения между характеристиками солнечных моделей и непрозрачностью в разных частях Солнца, была рассчитана серия моделей с искусственно измененными непрозрачностями (тем не менее все модели имеют радиус и светимость, равные солнечным). Разумеется, параметры модели изменяются после таких модификаций, и такая модель имеет светимость и радиус, не равные солнечным. В общем случае необходимо делать калибровку радиуса и светимости (§1.1) заново, т.е. много раз рассчитывать эволюционный трек. Чтобы избежать этого, применялся упрощенный подход. Эволюционная калибровка заключается в подборе начального химического состава и α; будем изменять содержание водорода и α у модифицированной модели так, чтобы получить необходимые значения радиуса и светимости. Подчеркнем, что в нашем подходе эти модели не будут эволюционными; они получены модификацией модели современного Солнца. При этом стандартная модель использовалась как "опорная" – из нее брался профиль содержания водорода $X_0(M_r/M_\odot)$:

$$X(M_r) = X_0(M_r) + \delta X. \tag{4.6}$$

Имея два свободных параметра α и δX, можно получить модель с нужными значениями радиуса и светимости. Такую модель Солнца в дальнейшем будем называть *статической*. Приближенность такого подхода заключается в пренебрежении тонкими различиями в профиле химического состава между разными эволюционными треками. Расчет демонстрирует, что это приближение выполняется с хорошей степенью точности, достаточной для целей этой работы. Для иллюстрации приведем характеристики двух моделей, одна из которых (350-0015) рассчитана методом эволюционной калибровки, а другая (350-0016) – подбором α и δX (таблица 4.2).

Модель	α	T_c, K	ρ_c, см/г^3	X_c	$\lg P_c$	S/R
350-0015	1.614204520	16.00041371	147.5794499	.3188538	17.35299	20.8624
350-0016	1.610933166	15.99285842	144.8702114	.3296426	17.34977	20.8620
Разность	$2 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$1.8 \cdot 10^{-2}$	$3.3 \cdot 10^{-2}$	$1.8 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-5}$

Модель	Y	H_{bcz}/R	T_{bcz}, K	ρ_{bcz}, г/см^3	$F_{Cl^{37}}$	$F_{Ga^{71}}$
350-0015	.282459221	.279272240	2.176021295	.173039147	10.642	135.086
350-0016	.282839970	.278881093	2.172478617	.172039373	10.599	134.752
Разность	$5 \cdot 10^{-4}$	$1.4 \cdot 10^{-3}$	$1.6 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-3}$

Таблица 4.2. Разница между эволюционной (350-0015) и статической (350-0016) моделями.

Как видим, почти все параметры модели различаются незначительно – менее чем на 1%; ключевые характеристики (содержание гелия в оболочке Y и S) – менее чем на 0.1%. Заметное отличие профиля химического состава скомпенсировано изменением плотности, так что разности в давлении газа малы. Аналогичные результаты были получены в работе Christensen-Dalsgaard 1992.

Модификации непрозрачности производились в соответствии с делением модели Солнца на зоны (§3.1). Чтобы избежать скачков, вариация представлялась в виде гауссианы, накладываемой на профиль непрозрачности:

$$\kappa = \kappa_0 \left[1 + a \exp\left(-\frac{(\lg T - \lg T_0)^2}{w}\right)\right], \tag{4.7}$$

где a – амплитуда коррекции, w определяет ширину ее диапазона, T_0 – положение максимума коррекции. Для параметризации используется логарифм температуры; с равным успехом можно было бы применить логарифм плотности. Привязывать модификацию непрозрачности к конкретной модели (например, параметризуя коррекцию текущим радиусом r) было бы некорректным вследствие двух взаимосвязанных причин: 1) изучается влияние именно самой непрозрачности на модель; логично привязывать модификацию к самим таблицам, независимо от конкретной модели; 2) если параметризовать коррекцию текущим радиусом, возникает обратная связь (входные данные зависят от результата), и поведение процедуры модели становится непредсказуемым. Для каждой зоны принимались свои характеристики модифицирующей функции:

$$\begin{array}{lrl} \lg T_0 = 7.2 & w = 0.05 & \text{в ядре модели} \\ \lg T_0 = 6.6 & w = 0.05 & \text{в лучистой зоне} \\ \lg T_0 = 6.3 & w = 0.01 - 0.02 & \text{у дна конвективной зоны} \end{array} \tag{4.8}$$

Последняя строка соответствует модификации непрозрачности, применявшейся для изменения положения дна конвективной зоны (см. ниже). Рис. 4.3 отображает положение и форму этих коррекций; амплитуда a принята равной 0.3 (это весьма большое значение).

Рис. 4.4 демонстрирует серию статических моделей с различными амплитудами коррекций, отображенных на плоскость (Y, S). Из него следуют выводы, далее широко применяемые в этой работе:

1) повышение непрозрачности в ядре ведет главным образом к увеличению содержания гелия в оболочке Y и слабо изменяет удельную энтропию адиабатической части конвективной зоны S;

2) повышение непрозрачности в лучистой зоне уменьшает как Y, так и S.

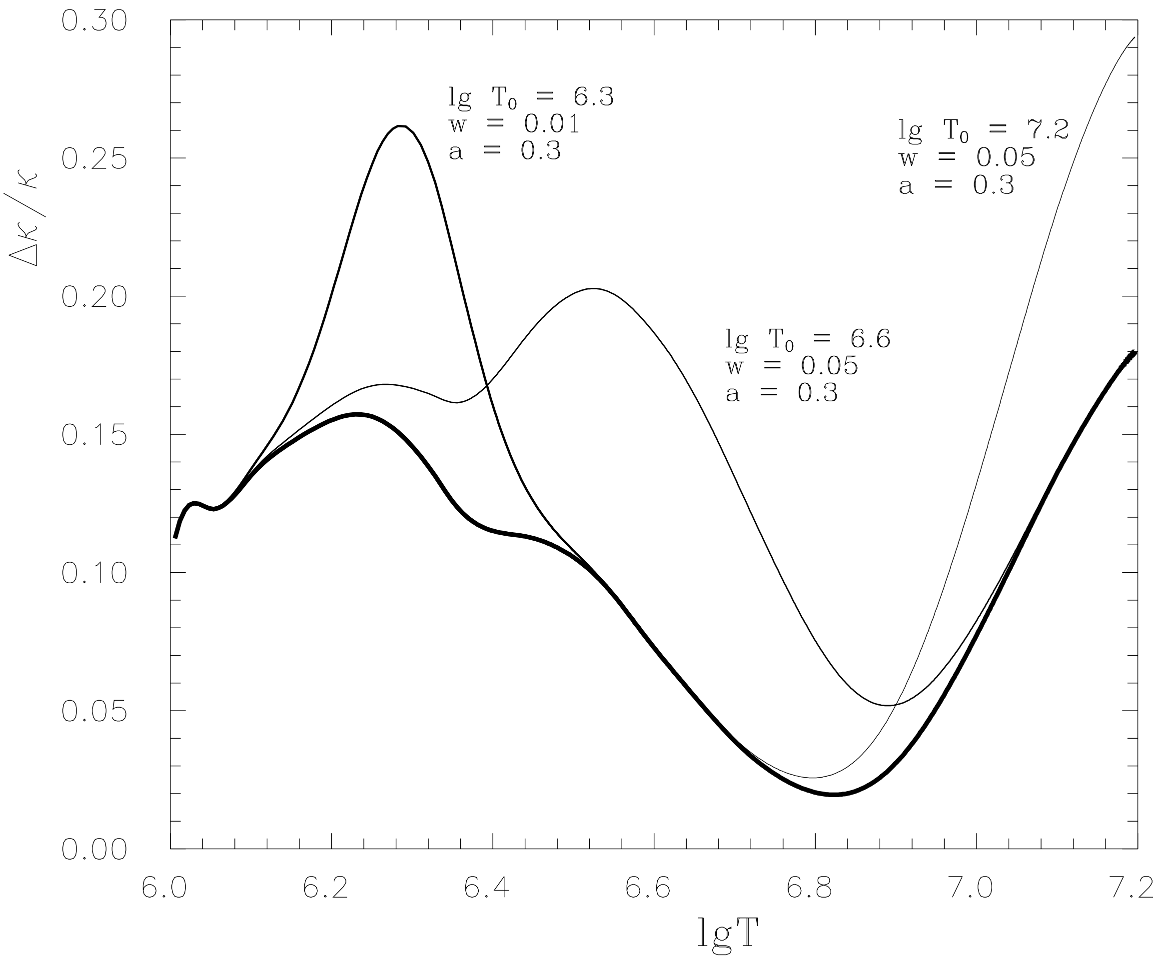

Рис. 4.3. Форма и положение коррекций непрозрачности для ядра, лучистой зоны и дна конвективной зоны

Эти результаты зависят от точных значений $\lg T_0$ и w. Если, например, смещать максимум коррекции в лучистой зоне к центру Солнца, то соответствующий вектор (K_r на рис. 1) будет приобретать все меньший наклон, стремясь к вектору, описывающему изменение непрозрачности в ядре. Если смещать максимум коррекции в лучистой зоне к поверхности, вектор смещения K_r будет приближаться к вертикали, одновременно уменьшаясь по величине. Количественные характеристики (для $\lg T_0$ и w из (4.8)) таковы:

$$
\begin{aligned}
\frac{d(S/R_g)}{da_c} &= -0.17 \\
\frac{dY}{da_c} &= 0.047 \\
\frac{d(S/R_g)}{da_e} &= -1.6 \\
\frac{dY}{da_e} &= 0.06
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

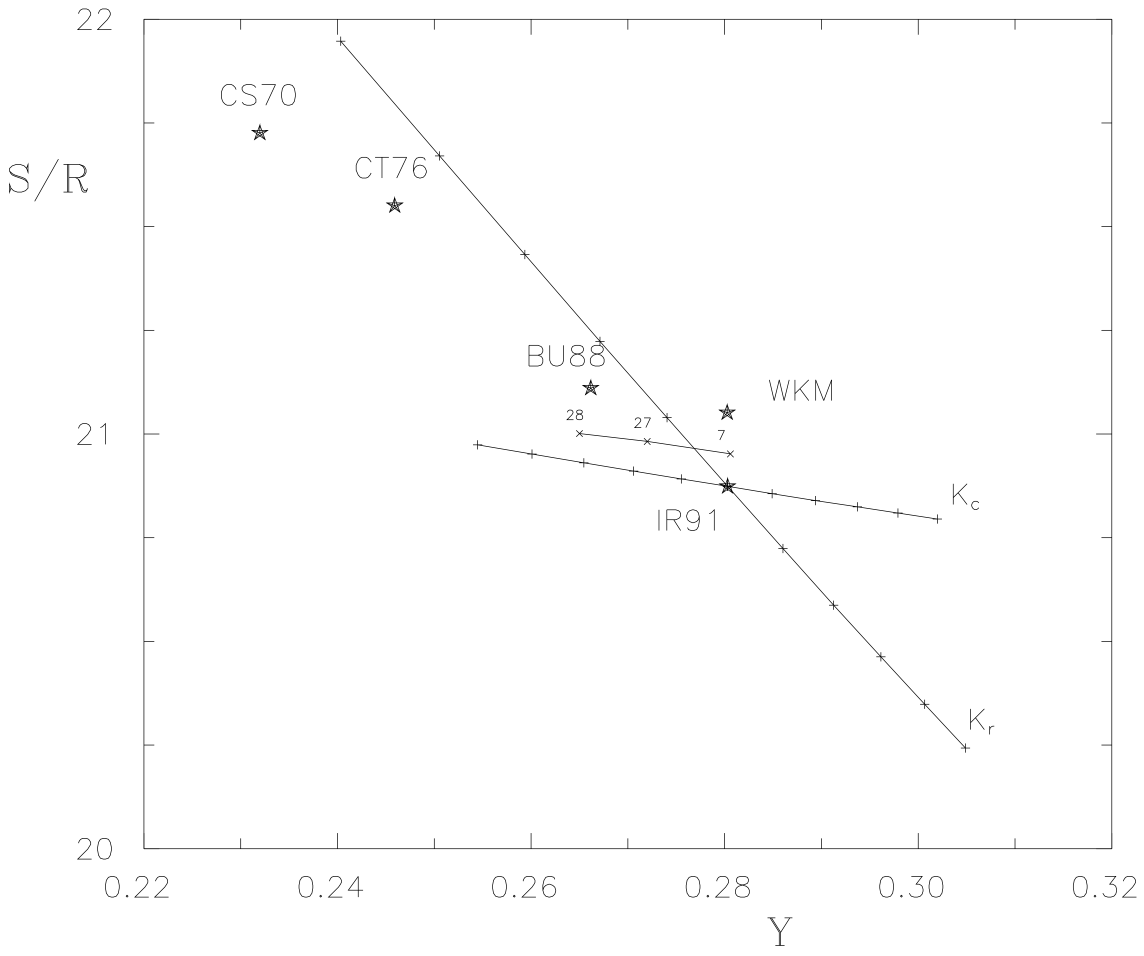

Рис. 4.4. Связь между непрозрачностью и параметрами моделей Солнца.

Пользуясь этими данными, можно предсказывать поведение модели при изменениях непрозрачности и наоборот, изменять непрозрачность так, чтобы получить нужные значения S и Y. Подчеркнем еще раз, что непрозрачность варьируется в ядре и лучистой зоне, а меняются параметры оболочки модели. Заметим также, что зависимости являются приблизительно линейными.

Вышеописанная зависимость может быть также интерпретирована по-другому.

1) Возьмем стандартную модель Солнца и изменим непрозрачность в лучистой зоне. Модель переместится в соответствии с вектором K_r. После этого *никакая* коррекция непрозрачности в ядре не способна привести модель к прежним значениям Y и S.

2) Если необходимо рассчитать модель Солнца с заданными значениями параметров оболочки Y_1 и S_1, то вектор перемещения $(Y, S) \to (Y_1, S_1)$ однозначно раскладывается на сумму векторов, параллельных K_r и K_c. Следовательно, параметры оболочки модели определяют строение ядра и лучистой зоны модели. Некоторая неоднозначность связана с формой коррекции непрозрачности, но она невелика.

3) Если непрозрачность в лучистой зоне задана, то удельную энтропию конвективной зоны можно с хорошей степенью точности считать известной, и наоборот: задание энтропии фиксирует непрозрачность в лучистой зоне.

J.Christensen-Dalsgaard также проводил изучение моделей с измененной (пониженной) непрозрачностью в ядре (1992); такие модели имитировали дополнительные источники переноса энергии (например, WIMP). Энтропия конвективной зоны для этих моделей была оценена по данным, любезно предоставленным J.Christensen-Dalsgaard (отметим, однако, что энтропия для этих моделей оценивалась в рамках уравнения состояния MHD, тогда как модели рассчитаны с уравнением состояния EFF (Eggleton, Faulkner, Flannery, 1973)). Точки 7, 27, 28 на рис. 4.4 соответствуют моделям с разными непрозрачностями в ядре из работы Christensen-Dalsgaard 1992. Они, как легко видеть, демонстрируют аналогичную зависимость между непрозрачностью в ядре модели, удельной энтропией вещества конвективной зоны и содержанием гелия.

В соответствии с вышеописанными закономерностями легко объяснить поведение стандартных моделей на плоскости (Y, S) (см. тот же рис. 4.4). В ряду таблиц IR91 $\to$ BU88 $\to$ CT76 $\to$ CS70 наблюдается равномерное понижение непрозрачности как в ядре, так и в лучистой зоне. Соответственно все они лежат почти на одной прямой, параллельной сумме векторов K_r и K_c (взятых с одинаковой амплитудой коррекций). Таблицы WKM содержат большие по сравнению с IR91 значения в ядре и меньшие в лучистой зоне; вследствие этого точка лежит в стороне от вышеуказанной прямой – содержание гелия в моделях IR91 и WKM совпало, что является достаточно неожиданным результатом (считается, что переход от таблиц LAOL к таблицам OPAL увеличивает содержание гелия примерно на 1-2%; см., например, Roxburg 1991).

Глава 5.

Гелиосейсмическая модель Солнца

Конечной целью гелиосейсмической теории является построение модели Солнца, теоретический спектр колебаний которой совпадает в пределах ошибок с наблюдаемым. Однако ожидать успешного решения этой задачи при прямолинейном подходе можно лишь случайно. Действительно, с одной стороны при построении самой модели (без каких либо ограничений со стороны гелиосейсмологии) используется по крайней мере пять априорных функций, известных иногда лишь с невысокой точностью, и в настоящее время отсутствует сколько-нибудь последовательное представление о взаимном влиянии ошибок в этих функциях и о возможных следствиях на результирующую модель. Но в тоже время при фиксированных функциях мы получаем вполне замкнутую задачу эволюционного моделирования (иначе построения стандартной солнечной модели). Таким образом, в рамках задачи о построении стандартной солнечной модели мы не имеем свободных параметров, которые можно было бы варьировать, чтобы улучшить согласование модельного спектра, и должны допускать те или иные вариации входных данных.

Подход, примененный в этой работе, состоит в использовании вторичной гелиосейсмической информации в виде относительно хорошо установленных параметров и функций, непосредственно характеризующих модель, и изучении вопроса о том, можно ли совместить значения этих параметров со стандартными или почти стандартными предположениями о строении Солнца.

При заданном профиле химического состава (независимо от того, эволюционный он или нет) и массе внутреннее строение звезды полностью определено (согласно теореме Фогта-Рессела (Cox, Giuli 1968)). Это значит, что модель будет иметь определенные радиус и светимость. Для того чтобы их значения соответствовали солнечным, необходимо иметь по крайней мере два свободных параметра. При построении стандартной модели в качестве таких параметров по традиции выбирают начальное содержание водорода (совпадающее с содержанием водорода в оболочке модели при сделанных предположениях об эволюции) и некоторый параметр теории конвекции, позволяющий управлять величиной градиента температуры в самых внешних слоях конвективной зоны. Выделение именно этих параметров сложилось в значительной мере историческим и обусловлено отсутствием независимых надежных оценок этих величин. Другими словами, из произвольно подбираемых величин задачи эти параметры превращаются в конечный результат задачи. Так, содержание гелия в стандартной модели является базовой (и самой точной) оценкой содержания гелия в солнечной системе, применяемой в астрофизике (Anders, Grevesse 1989). В общем случае, результатами задачи следует считать также такие величины, как поток нейтрино, глубину конвективной зоны и характеристики спектра колебаний. Однако важно иметь в виду, что кроме профиля содержания водорода, при построении модели используются по крайней мере четыре априорные функции, описывающие энерговыделение, непрозрачность, конвективный градиент и уравнение состояния, и известные с некоторой, часто не слишком хорошей точностью. Поэтому актуальной проблемой задачи о внутреннем строении Солнца, является определение ошибок результирующих параметров в зависимости от вариаций априорных физических функций.

5.1. Гелиосейсмологическая информация

Существуют несколько хорошо известных достижений гелиосейсмологии, которые могут быть успешно использованы в теории внутреннего строения Солнца: 1) определение глубины конвективной зоны; 2) восстановление профиля скорости звука; 3) определение содержания гелия в конвективной зоне. Приведем численные значения этих величин; история вопроса обсуждалась в §1.5.3.

Одно из лучших определений глубины солнечной конвективной зоны содержится в работе Christensen-Dalsgaard, Gough, Thompson, 1991 ($H_{cz}/R_\odot = 0.287 \pm 0.003$). Более поздние результаты Guzik, Cox 1993; Dziembowski *et al.* 1994 согласуются с ними в пределах ошибок.

Профиль скорости звука, использованный в этой работе, был получен в статье Vorontsov, Shibahashi 1991 асимптотическим методом второго порядка по частотам наблюдений Libbrecht, Woodard, Kaufman 1990 (высокие l) и Jimenez *et al.* 1988 (низкие l). На рис. 5.1 показан общий вид профиля c^2 внутри Солнца; отметим, что разница между модельным и восстановленным профилями почти незаметна в таком масштабе.

Принцип определения содержания гелия в оболочке Y и энтропии конвективной зоны S достаточно прост. Как обсуждалось в гл. 3, оболочка Солнца характеризуется двумя параметрами (в качестве которых могут быть выбраны S и Y). Можно рассчитать набор моделей оболочек с разными S, Y, рассчитать их частоты колебаний и сравнить последние с наблюдаемыми значениями. Очевидно, модель оболочки Солнца с наилучшими собственными частотами укажет на наилучшие Y и S (при этом необходимо ограничиться частотами с высокими l, т.к. модели ядра Солнца в данном

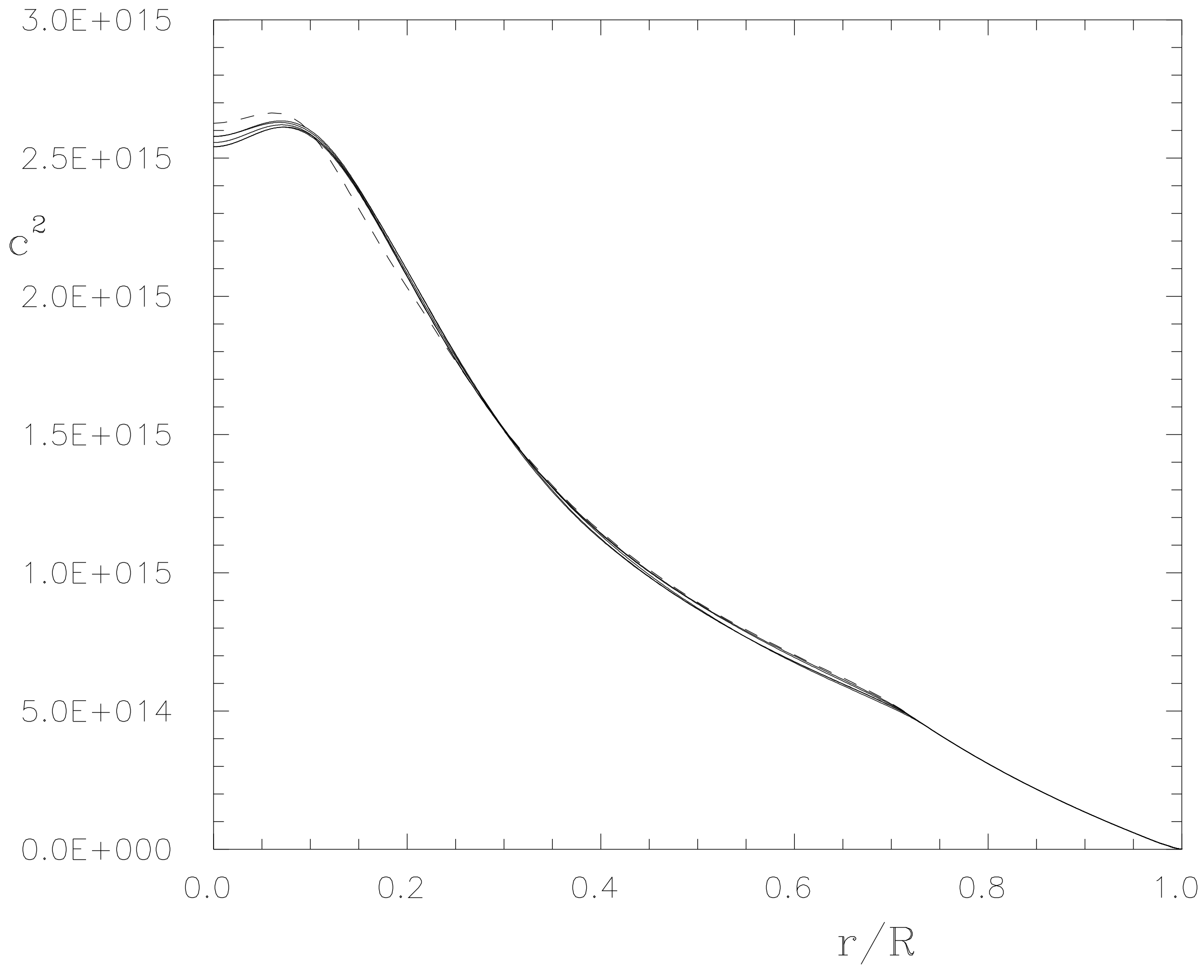

Рис. 5.1. Профили квадрата скорости звука. Штриховая линия – восстановление по частотам колебаний Солнца (Vorontsov, Shibahashi 1991); тонкие линии – стандартные модели с различными таблицами непрозрачностей, рассчитанные в этой работе.

подходе не рассчитываются вовсе). На практике главная сложность в применении этой методики состоит в выборе производных от частот величин, которые могли бы служить критерием для сравнения. Более подробно об этом см. в работах, посвященных определению содержания гелия (они перечислены в гл. 1). Большинство авторов, однако, игнорируют полученные значения S (или эквивалентного параметра) и приводят лишь содержание гелия Y. Это не означает, что Y может быть определено независимо – калибровка всегда требует двух параметров. Иногда можно встретить утверждение, что при известной глубине конвективной зоны один из параметров (например, S) становится определенным (зависит от второго). Это, однако, предполагает, что непрозрачность у дна конвективной зоны известна с хорошей точностью. К сожалению, это не так.

Содержание гелия, получаемое разными авторами в настоящее время, близко к 0.245-0.250 (§1.5.3). К сожалению, значение энтропии вещества конвективной зоны приводятся только одной группой исследователей (Baturin, Vorontsov 1995). Поскольку необходимо использовать согласованные между собой значения Y и S (полученные в рамках одной калибровки), то в дальнейшем будем ориентироваться на $Y = 0.25$, $S/R = 21.0$ моль/г (Baturin, Vorontsov 1995).

5.2. Возможность получения гелиосейсмической модели за счет допущения модификаций непрозрачности

5.2.1. Параметры конвективной оболочки S и Y

Рассмотрение вопроса о возможности построения гелиосейсмической модели начнем с параметров конвективной оболочки – удельной энтропии вещества адиабатической части конвективной зоны S и содержания гелия (по массе) Y. Таблица 4.1 (§4.2), содержащая данные о стандартных моделях, показывает, что ни одна из них не согласуется со значениями $S = 21.0$ моль/г, $Y = 0.25$. Главная проблема для моделей с современными таблицами непрозрачностей состоит в слишком высоком содержании гелия. Один из множества возможных путей лежит в вариации непрозрачностей в недрах Солнца. Применим к этой проблеме результаты, полученные в предыдущей главе и попытаемся получить статическую модель Солнца, имеющую требуемые ($S = 21.0$ моль/г, $Y = 0.25$) значения параметров.

Согласно изображенным на рисунке векторам модификации параметров модели при изменении непрозрачности (ср. рис. 4.4 и 5.2), для модели с таблицами непрозрачности IR91 достаточно уменьшить непрозрачность в ядре, не изменяя ее в лучистой зоне (непрозрачность в ядре изменяет содержание гелия и не затрагивает энтропию конвективной зоны) (получившаяся модель имеет номер 350-0083; см. табл. 5.1). Необходимое уменьшение непрозрачности в ядре составляет почти 60%. Отметим, что такой вывод носит наводящий характер, указывая, в каком направлении следовало бы менять непрозрачность. Точный профиль коррекции непрозрачности, определяемый неединственным образом в рамках столь слабых ограничений, зависит от выбранной параметризации вариаций непрозрачности (4.8).

Очевидно, можно рассчитать модель с сейсмической оболочкой и по-другому – например, взяв в качестве начальной модель с непрозрачностями CT76. У этой модели слишком высокая энтропия, в то время как содержание гелия близко к требуемому. Чтобы уменьшить энтропию, можно увеличить непрозрачность в лучистой зоне, однако при этом увеличится содержание гелия, и для компенсации такого увеличения

Модель	Y	S/R	H_{cz}/R	T_c, 10^6 K	ρ_c, г/см^3	$c^2/10^{15}$
350-0083	0.2499	20.99	0.3067	14.61	180.99	2.4532
350-0080	0.2507	21.03	0.3063	15.12	162.13	2.5323
350-0064	0.2496	21.02	0.2874	14.60	181.02	2.4530
350-0081	0.2504	21.06	0.2870	15.12	162.04	2.5324
350-0105	0.2803	20.87	0.2810	15.72	150.84	2.5407
350-0113	0.2400	21.36	0.2862	14.65	169.69	2.4822
350-0112	0.2503	21.23	0.2876	14.94	164.07	2.5011
350-0111	0.2596	21.10	0.2863	15.14	162.21	2.5077
350-0114	0.2803	20.82	0.2877	15.69	152.27	2.5376

Модель	$F_{Cl^{37}}$	$F_{Ga^{71}}$	a_{core}	a_{rad}
350-0083	2.98	103.3	−0.578	0.0
350-0080	4.51	110.0	−0.250	0.510
350-0064	2.95	103.1	−0.580	0.0
350-0081	4.50	109.9	−0.250	0.510
350-0105	8.51	127.4	0	0
350-0113	2.96	102.6	−0.507	−0.03
350-0112	3.94	107.6	−0.385	−0.05
350-0111	4.81	111.9	−0.309	−0.04
350-0114	8.35	126.9	−0.026	−0.07

Таблица 5.1. Параметры моделей с подобранными Y, S (350-0083, 350-0080, 350-0064, 350-0081) и заданной скоростью звука (350-111 – 350-114). 350-0105 – стандартная модель с таблицами непрозрачностей IR91. c^2 – квадрат скорости звука в центре, a_{core} и a_{rad} – коэффициенты в (4.7) для ядра Солнца и лучистой зоны соответственно.

требуется снова уменьшение непрозрачности в ядре. Результирующая модель обозначена 350-0080.

Таким образом, модель с заданными характеристиками конвективной зоны построить можно и не единственным образом (что естественно при столь малой априорной информации). Однако очевидны общие черты в этих моделях. Во-первых, они должны иметь непрозрачность в лучистой зоне, близкую к непрозрачности OPAL. На рис. 5.3 показаны непрозрачности в 350-0083 и 350-0080, вычисленные с учетом коррекций непрозрачности, сделанных при построении этих моделей, но для фиксированного набора точек в плоскости (T, ρ). Во-вторых, другой общей чертой является весьма низкая непрозрачность в ядре для обеспечения низкого содержания гелия. Связь между непрозрачностью в ядре и содержанием гелия неоднократно отмечалась в литературе.

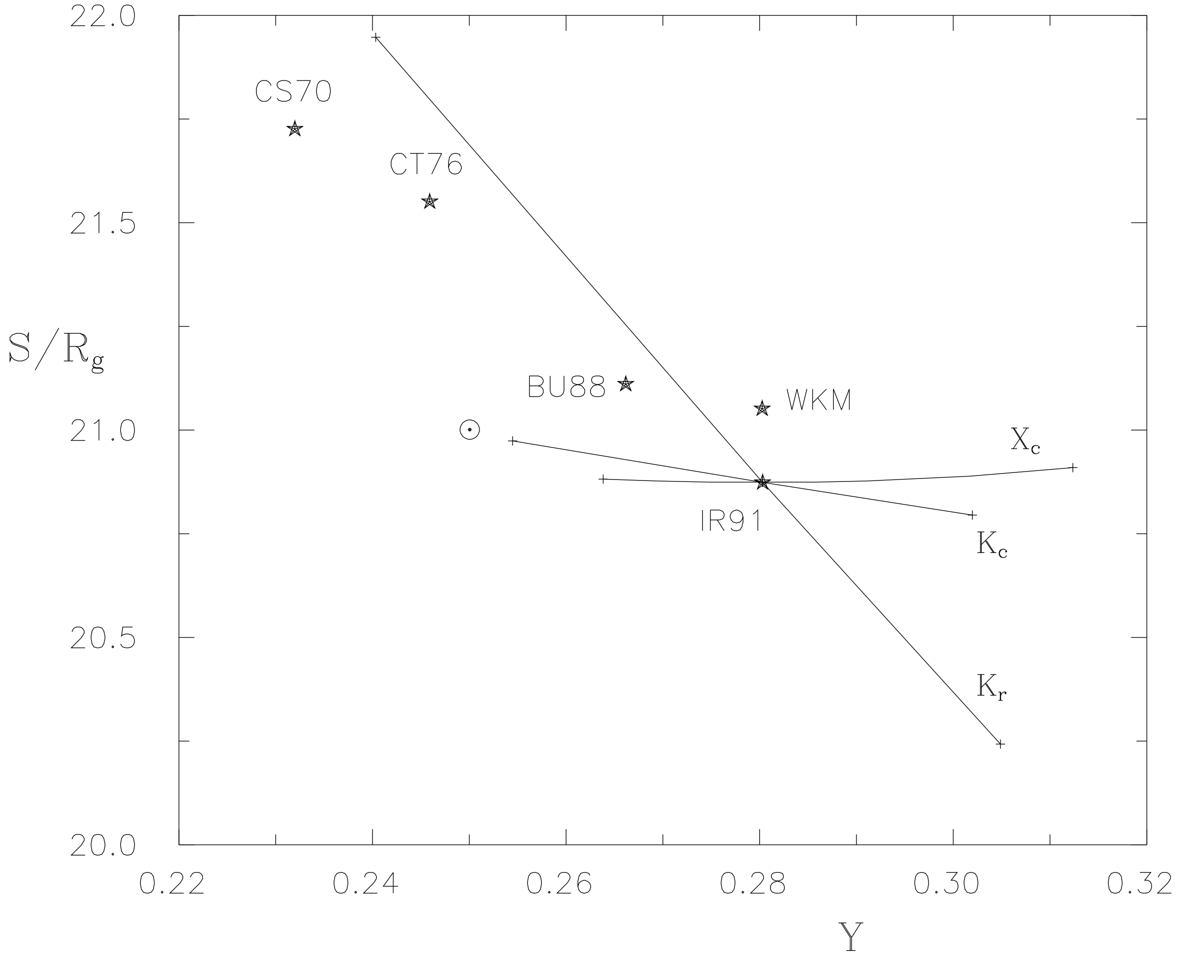

Рис. 5.2. Подбор параметров оболочки Солнца.
Звездочки – стандартные модели; около них указано обозначение таблиц непрозрачности в соответствии с §4.2. Значок, напоминающий Солнце – гелиосейсмические данные. Прямые, помеченные K_c и K_r обозначают направление изменений модели при модификации непрозрачности соответственно в ядре и лучистой зоне модели (см. также главу 4). X_c – изменение параметров модели при модификации химического состава в ядре (см. §5.3.1-)

Отметим также, что использованные способы коррекции непрозрачности далеко не единственны. Возможно применение широкого класса "волнообразных" коррекций в лучистой зоне, результатом которых будет сохранение параметров модели. Примером подобного рода вариаций непрозрачности может служить разность между моделями 350-0083 и 350-0080 (см. рис. 5.3). Однако, как будет продемонстрировано далее, коррекции непрозрачности тесно связаны с профилем скорости звука в модели, что дает возможность сузить множество возможных вариации. Коррекции непрозрачности в

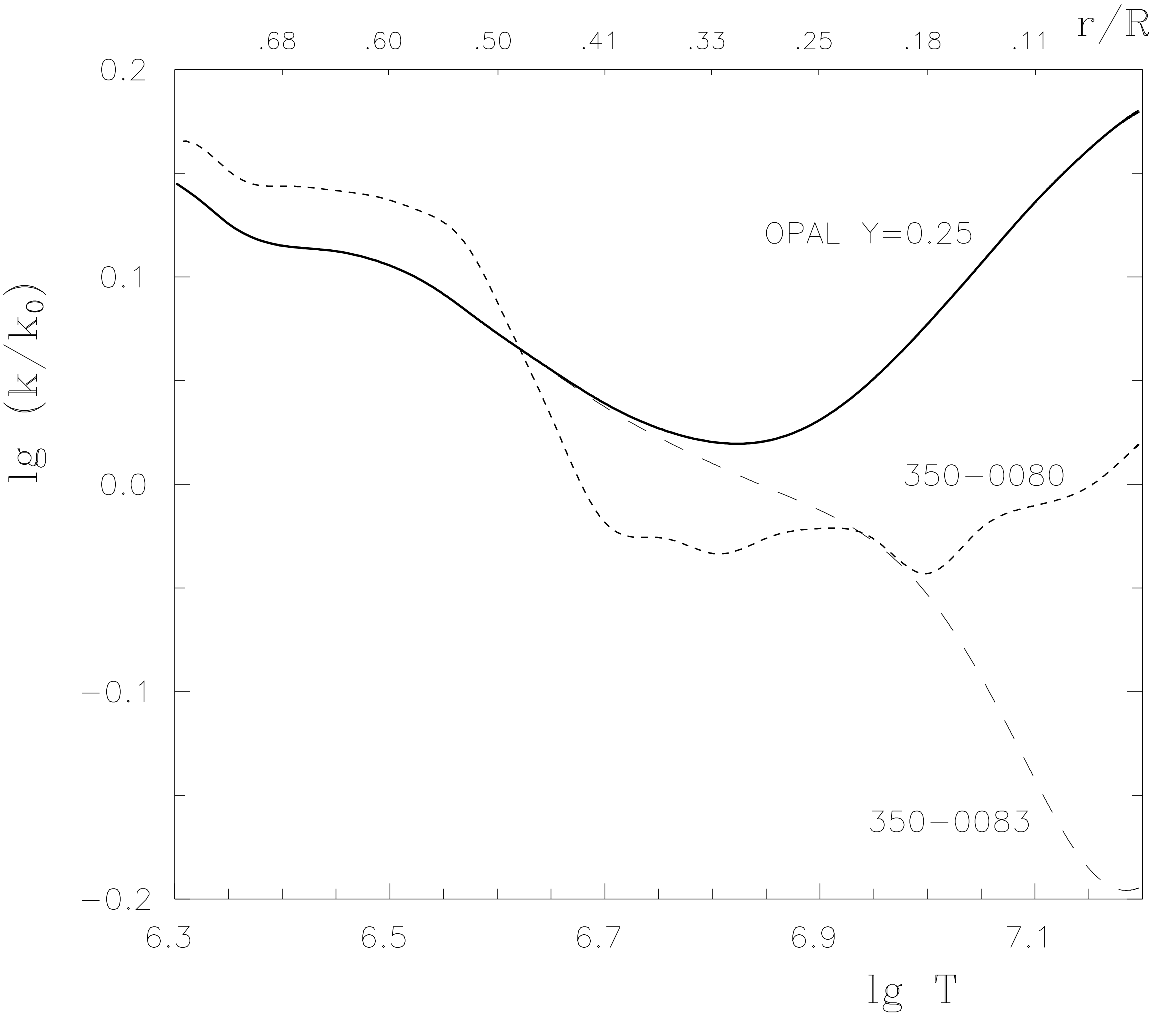

Рис. 5.3. Непрозрачность в моделях с гелиосейсмическими значениями S и Y. Показан профиль из таблиц IR91 (OPAL) и профили из двух моделей с подобранными Y, S. Одна из них (350-0083) получена модификацией стандартной модели с непрозрачностями IR91, вторая (350-0080) – модификацией модели с непрозрачностями CT76.

ядре в свою очередь могут быть частично эквивалентны коррекциям профиля химического состава (см. §5.3.1), хотя модификации профиля водорода не могут полностью скомпенсировать столь значительные коррекции непрозрачности в ядре.

5.2.2. Глубина конвективной зоны

Обратимся к следующей возможности уточнить наши представления о строении Солнца, используя гелиосейсмические результаты. Рассмотрим следствия измерения геометрической глубины конвективной зоны по частотам колебаний. Если мы рассматриваем заданный класс моделей со стандартным основанием конвективной зоны, то более естественно вести анализ в терминах непрозрачности. В основе его лежит связь между параметрами конвективной зоны (Y, S), ее глубиной H_{cz} и непрозрачностью $\kappa(T, \rho, Y)$.

Основным предположением при этом является то, что прекращение конвекции наступает в соответствии с критерием Шварцшильда, т.е. при равенстве лучистого и адиабатического градиентов температуры. В солнечных моделях со стандартным описанием конвекции между указанными четырьмя параметрами (или даже тремя из них) существует однозначное соотношение, выполняющееся с точностью, более чем достаточной для проводимого анализа непрозрачности и сейсмических свойств. Для обоснования такого предположения перепишем критерий Шварцшильда в виде

$$\kappa \frac{P}{T^4} = \nabla_{ad} \frac{16\pi acGM_r}{3L} \tag{5.1}$$

Правую часть (5.1) можно считать постоянной с хорошей степенью точности, т.к. адиабатический градиент у основания конвективной зоны близок к 2/5, светимость равна полной светимости Солнца, а масса отличается от полной массы Солнца на 2% и не может быть сильно изменена. Но функция $\kappa P/T^4$ при заданном химическом составе есть функция только T и ρ или только функция температуры и энтропии (T, S). Таким образом, если мы знаем энтропию S и химический состав, то температуру в основании конвективной зоны можно определить на основании (5.1). Если предположить, что уравнение состояния близко к уравнению состояния идеального газа, то зависимость отношения κ/ρ от S и Y можно выразить более явно, переписав левую часть (5.1) через $f(S) = P/T^{2.5}$ и молекулярный вес μ

$$\kappa \frac{P}{T^4} = \frac{\kappa}{\rho} f^2(S) \frac{R_g}{\mu} \tag{5.2}$$

Выражения (5.1) и (5.2) означают, что существует связь между κ/ρ, S, Y, и она не включает радиус. Или, зная S и Y, мы можем определить κ/ρ в основании конвективной зоны.

Другим необходимым положением является то, что профиль температуры (и плотности) в адиабатической конвективной зоне есть функция только S и Y и не зависит от строения внешних слоев. Для оценки возможных вариаций используем предположение о близости уравнения состояния к уравнению состояния для идеального газа и пренебрежимо малой массе оболочки. Тогда зависимость $T(r)$ в конвективной зоне имеет вид (Батурин, Аюков 1996)

$$T(r) = T_0 + \frac{GM_r \mu \nabla_{ad}}{R_g} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \tag{5.3}$$

Использование (5.3) делает очевидным, что зависимость от строения внешних сверхадиабатических частей и атмосферы весьма слаба. Например, изменения в теории конвекции могут вести к изменению толщины внешних слоев на величину порядка 50–100 км, что эквивалентно вариации начального радиуса r_0 в выражении (5.3) (поскольку профиль температуры и плотности определен при заданной энтропии). Однако производная (Батурин, Аюков 1996)

$$\frac{d\ln T}{d\ln r}_{r=0} = \frac{T - T_0}{T}\frac{r}{r - r_0} \approx 10^{-2} \tag{5.4}$$

(в условиях, характерных для солнечной конвективной зоны), т.е. вариации начального радиуса порядка 10^{-3} вызовут относительные вариации температуры в основании конвективной зоны порядка 10^{-5}. Иначе говоря, считая известными Y, S и H_{cz}, можно сказать, какова непрозрачность в основании конвективной зоны (то есть в некоторой точке T, ρ). Соответственно, можно сравнить таким образом полученную непрозрачность с теоретической, для оценки точности последней. Чтобы представить наглядно эти оценки с учетом возможных неопределенностей в значениях Y, S и H_{cz}, были выполнены расчеты оболочек для таблиц непрозрачности OPAL. Результаты представлены на рис. 5.4, где глубина конвективной зоны отложена как функция энтропии для различных содержаний гелия, что дает представление о глубинах конвективной зоны в моделях при использовании таблиц OPAL. Паралеллограмм представляет область возможных ошибок в гелиосейсмической калибровке гелия и энтропии (Baturin, Vorontsov 1995). Очевидно, что таблицы OPAL дают слишком глубокую конвективную зону при гелиосейсмических значениях Y и S (около $H_{cz}/R = 0.305$). Это означает, что эти непрозрачности завышены при температурах $T = 2.3$ млн. К.

Здесь мы вступаем в противоречие с выводом §5.2.1, когда казалось, что необходимые для построения модели с низкими энтропией и гелием непрозрачности в лучистой зоне подтверждают правильность непрозрачностей OPAL в лучистой зоне. Однако анализ положения основания конвективной зоны ведет к заключению, что непрозрачности OPAL завышены у дна конвективной зоны. Формально, такое противоречие преодолимо. Поскольку "локальные" вариации непрозрачности у основания конвективной зоны не влияют на параметры полной модели, то мы можем построить модели (350-0064 и 350-0081) с "исправленной" глубиной конвективной зоны, сохраняя значения (Y, S). Таким образом, использование еще одного ограничения – глубины конвективной зоны – ведет к "уточнению" профиля непрозрачности, но делает такую непрозрачность труднообоснуемой с физической точки зрения.

Отметим некоторые особенности проведенного анализа. Во-первых, в основе наших рассуждений лежит использование определения энтропии в конвективной зоне. До

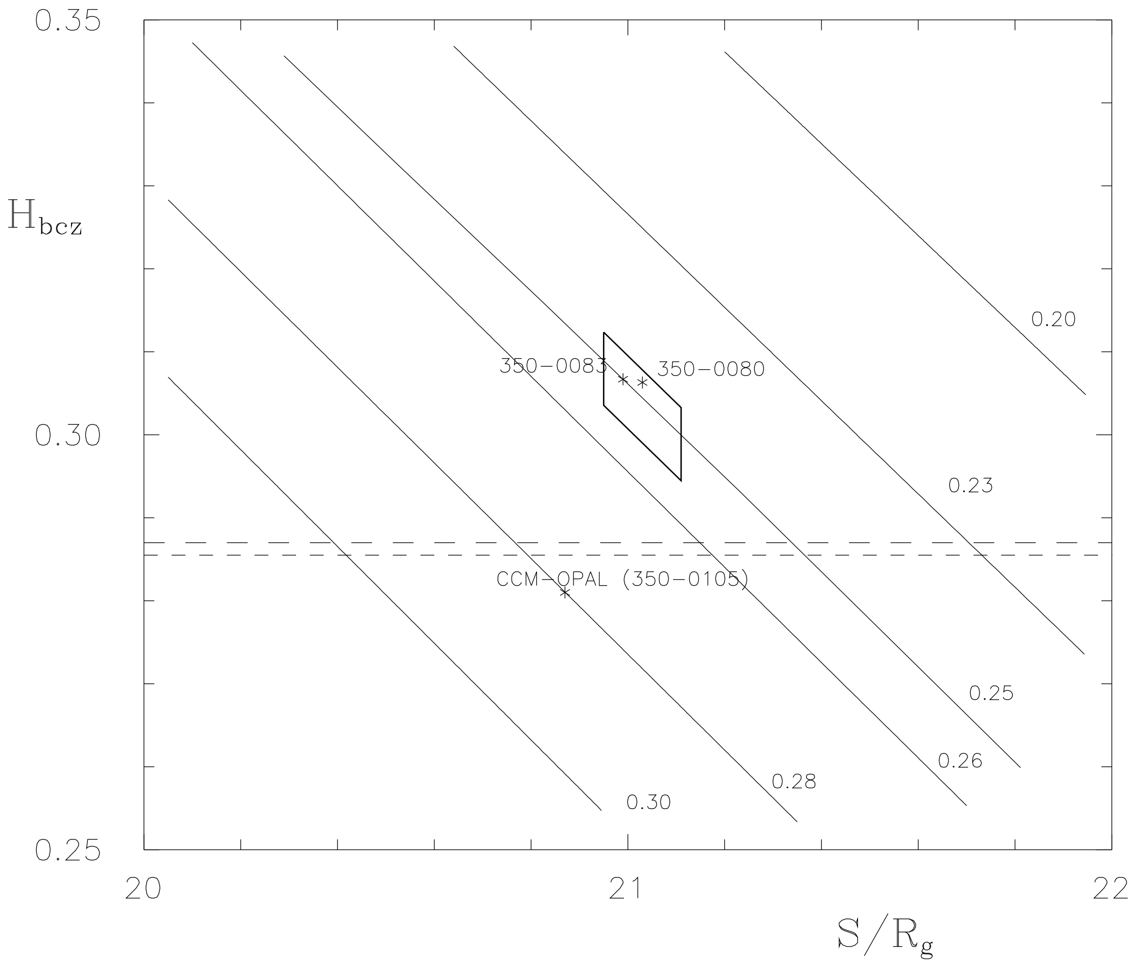

Рис. 5.4. Глубина конвективной зоны как функция энтропии и содержания гелия для моделей с таблицами непрозрачностей IR91 (OPAL). Наклонные линии показывают значения Y. Горизонтальные штриховые линии отмечают глубину конвективной зоны в соответствии с Christensen-Dalsgaard, Gough, Thompson 1991. Параллелограмм – параметры конвективной зоны по Baturin, Vorontsov 1995.

тех пор, пока мы не имеем величины энтропии в конвективной оболочке (вместе с химическим составом, естественно), согласование глубины конвективной зоны является чисто случайным совпадением. Например, стандартная модель с таблицами IR91 имеет более мелкую глубину конвективной зоны (по сравнению со сейсмической), что достигается за счет большего содержания гелия и не означает, что нам нужно увеличивать непрозрачность.

Во-вторых, анализ не зависит от строения модели в целом, а касается лишь непрозрачностей около основания конвективной зоны.

В-третьих, проведенный анализ основан на критерии Шварцшильда. Наиболее очевидным источником нарушений этого критерия может являться овершутинг на дне конвективной зоны. Однако согласно общим представлениям о природе овершутинга он может вести к перемещению основания конвективной зоны (то есть точки перелома в градиенте температуры) вглубь по сравнению с положением точки $\nabla_{rad} = \nabla_{ad}$, где под ∇_{rad} мы понимаем лучистый градиент температуры, т.е.

$$\nabla_{rad} \equiv \frac{3LP}{16\pi acT^4 GM_r}\kappa. \tag{5.5}$$

Поскольку гелиосейсмические определения дают именно положения точки перелома, то предположение о значительном овершутинге лишь усугубляет несоответствие – точка $\nabla_{rad} = \nabla_{ad}$ оказывается в этом случае расположенной еще ближе к поверхности, то есть дальше от точки в модели, рассчитанной с непрозрачностями OPAL.

В-четвертых, мы не рассматриваем возможность большой ошибки (превышающей пределы, указанные авторами) в определении глубины конвективной зоны по частотам, хотя существуют условия, при которых такое определение может быть систематически смещенным. Одним из примеров может быть наличие градиента химического состава сразу под основанием конвективной зоны. Такой градиент встречается при расчете моделей с учетом диффузии элементов в процессе солнечной эволюции. При этом подобный градиент ведет к изменению градиента скорости звука, что может маскировать или искажать гелиосейсмическую оценку.

5.2.3. Профиль скорости звука

Рис. 5.1 показывает, что разности скорости звука между типичной стандартной моделью и гелиосейсмическим профилем невелики. Несмотря на масштаб, это действительно так – скорость звука в стандартной модели с таблицами IR91 действительно близка к гелиосейсмической. Этот факт свидетельствует в пользу того, что таблицы OPAL, по-видимому, улучшили наше понимание внутреннего строения Солнца. На рис. 5.5 приведены профили c^2 в стандартных моделях с непрозрачностями BU88, WKM, IR91, доказывающие этот факт.

При заданном профиле квадрата скорости звука $c^2(r)$ и известном уравнении состояния (известном $\Gamma_1(c^2, r)$) механическая структура модели (профили ρ и P) может быть рассчитана без использования закона лучистого переноса. Действительно, уравнение гидростатического равновесия при известном отношении $u \equiv P/\rho = c^2/\Gamma_1$ можно переписать в виде:

$$\frac{d}{dr}\left\{\frac{r^2}{G\rho}\frac{d}{dr}\left(u\rho\right)\right\} = -4\pi\rho r^2 \tag{5.6}$$

Другими словами, имея точный и полный профиль скорости звука, мы могли бы получить структуру модели с точностью до не слишком существенной постоянной интегрирования – например, в виде поверхностной плотности. (Вторая постоянная интегрирования для уравнения (5.6) фиксируется требованием регулярности поведения массы ($M_r(r = 0) = 0$, или $d\rho/dr = 0$ при $r = 0$).

Однако даже только механическая модель может быть построена не для всякого профиля $c^2(r)$, хотя точная формулировка необходимых условий довольно сложна. Отметим, как пример, условие заданной массы модели. Кроме того, если полагать, что полученная модель должна иметь черты, характерные для Солнца, то в конвективной зоне должно быть $d\log(c^2/\Gamma_1)/d\log P = (\Gamma_1 - 1)/\Gamma_1$, то есть должно существовать разумное уравнение состояния в виде Γ_1, чтобы данное уравнение было удовлетворено для заданного профиля скорости звука, в противном случае мы не можем построить адиабатически стратифицированной конвективной зоны. Также должны выполняться некоторые (не жесткие) ограничения на профиль скорости звука около поверхности и около центра (например, $d(c^2/\Gamma_1)/dr \sim O(r)$ около центра). Будем полагать, что используемый профиль $c(r)$ удовлетворяет всем необходимым условиям, и позволяет построить солнечную модель. Такое допущение используется главным образом потому, что такой профиль будет использоваться локально, лишь в лучистой зоне, игнорируя его поведение и около поверхности, и около центра, где он определяется со значительными ошибками, а также в конвективной зоне (последнее в основном из-за проблем с восстановлением скорости звука около основания конвективной зоны, см. обсуждение ниже).

В действительности существуют дополнительные ограничения на профиль скорости звука, связанные с тепловой структурой звезды, простейшим из которых является условие полной светимости (система условий в близкой постановке задачи была рассмотрена в Antia, Chitre 1995). Используемое соотношение между непрозрачностью в лучистой зоне и энтропией в конвективной зоне является также ограничением такого рода. Поэтому мы считаем необходимым рассматривать сразу полные (а не отдельно механические) модели, принимая гипотезы о виде профиля химического состава. Существует проблема, связанная с тем, что детальное поведение профиля скорости звука неизвестно около основания конвективной зоны. Это вызвано волновой природой колебаний, а именно, конечной и достаточно большой длиной волны пятиминутных колебаний в этой области. Как результат, разрешающая способность при восстановлении по частотам профиля $c(r)$ невелика и нельзя рассчитывать на точное восстановление деталей при использовании асимптотических методов (эквивалентных приближению лучевой акустики) в масштабе существенно меньшем, чем длина волны.

Вернемся к моделям 350-0064 и 350-0081. Они обладают не только заданными содержанием гелия и энтропией, но так же и глубиной конвективной зоны, соответствующей гелиосейсмическому определению. Однако такое согласование было достигнуто за счет сложной коррекции непрозрачности – локального понижения около основания

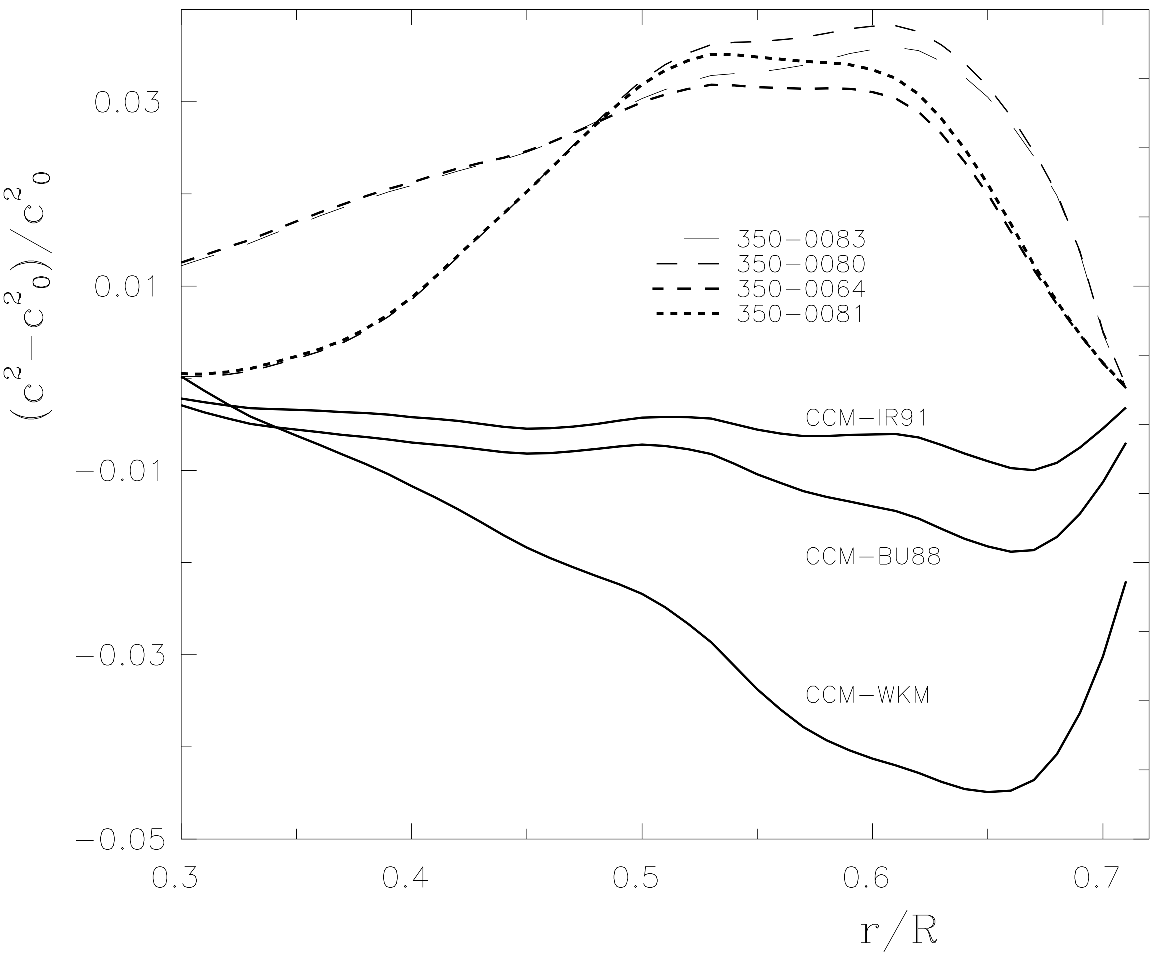

Рис. 5.5. Профили квадрата скорости звука c^2 в моделях с подобранными параметрами конвективной зоны 350-0080, 350-0081, 350-0083, 350-0064 и стандартных моделях. В качестве нулевой отметки c_0^2 служит гелиосейсмический профиль скорости звука из Vorontsov, Shibahashi 1991.

конвективной зоны и сохранения ее на уровне OPAL в лучистой зоне. Сама по себе такая коррекция непрозрачности выглядит труднообоснуемой, и наводит на мысль, что подобное согласование получено достаточно искусственным путем.

Поэтому, чтобы построить модель с заданным профилем скорости звука и заданной глубиной конвективной зоны, мы должны отказаться от задания параметров оболочки, фиксируя только содержание гелия, и определяя энтропию как часть процедуры модельной калибровки. Другими словами, полная солнечная модель с данным Y и профилем скорости звука может быть получена лишь при фиксированном значении энтропии в оболочке.

Построение такой модели может быть реализовано многими способами. Технически, в процессе построения модели используется непрозрачность как функциональный параметр для достижения заданного профиля скорости звука.

Поскольку скорость звука неизвестна у дна конвективной зоны (см. выше), то в этой ситуации используется профиль скорости звука только в лучистой области, получая начальные значения из модели конвективной зоны, которая сама по себе удовлетворяет сейсмическим ограничениям на геометрическую глубину, и имеет определенное содержание гелия. Энтропия в уже не может быть задана априори, поскольку фиксированный профиль скорости звука определяет непрозрачность (см. выше).

Использовались последовательные приближения для непрозрачности, обеспечивающие вначале нахождение некоторого среднего уровня непрозрачности для получения "правильного" в среднем профиля скорости звука и, одновременно, построения полной модели (в процессе этого определяется допустимое значение энтропии в оболочке). Далее добавлялась тонкая "несистематическая" коррекция непрозрачности, которая рассчитывалась с использованием модели оболочки с заданным Y и полученным S и выражения для градиента скорости звука, полученное из общего выражения (Воронцов, Жарков 1988), при условии постоянства химического состава и приближения постоянного Γ_1:

$$\frac{d\ln c^2}{d\ln P} = 1 - \frac{1}{\Gamma_1} - Q(\nabla_{ad} - \nabla_{rad}) \tag{5.7}$$

Независимо от способа построения, мы получаем однопараметрическое семейство моделей, отличающихся содержанием гелия в оболочке, причем каждая такая модель дает нам определенное значение энтропии, а также коррекцию профиля непрозрачности в лучистой зоне.

Подчеркнем еще раз роль правильной глубины конвективной зоны в модели. Поскольку используется только градиент скорости звука, то корректность начальной точки интегрирования должна обеспечиваться независимо. Хорошо известно, что профили скорости звука внутри конвективной зоны близки в моделях с разной энтропией, химическим составом и т.д. (см. Christensen-Dalsgaard 1986). Поэтому при определении начальной точки очень важно согласование геометрической глубины конвективной зоны с тем, что получено при сейсмическом определении.

Параметры рассчитанного семейства моделей отложены на рис. 5 в виде пунктирной линии. Очевидно, что ни одна из моделей этого семейства не соответствует гелиосейсмическим калибровкам параметров зоны ионизации гелия. В то же время стандартная модель с непрозрачностями IR91 весьма близка к одной из моделей семейства (что неудивительно).

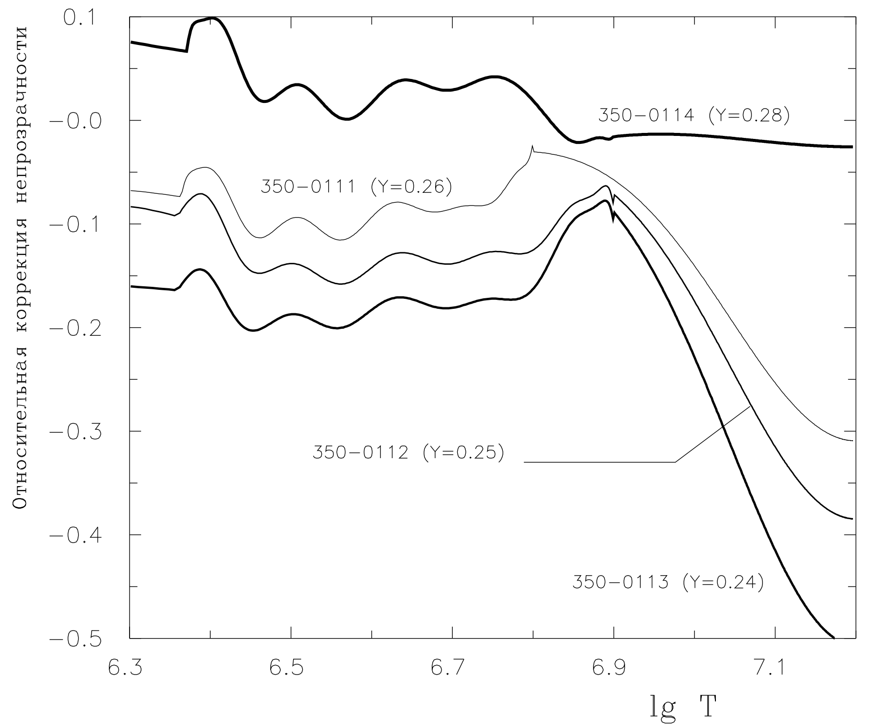

Рис. 5.6. Коррекция непрозрачности в моделях с исправленной скоростью звука.

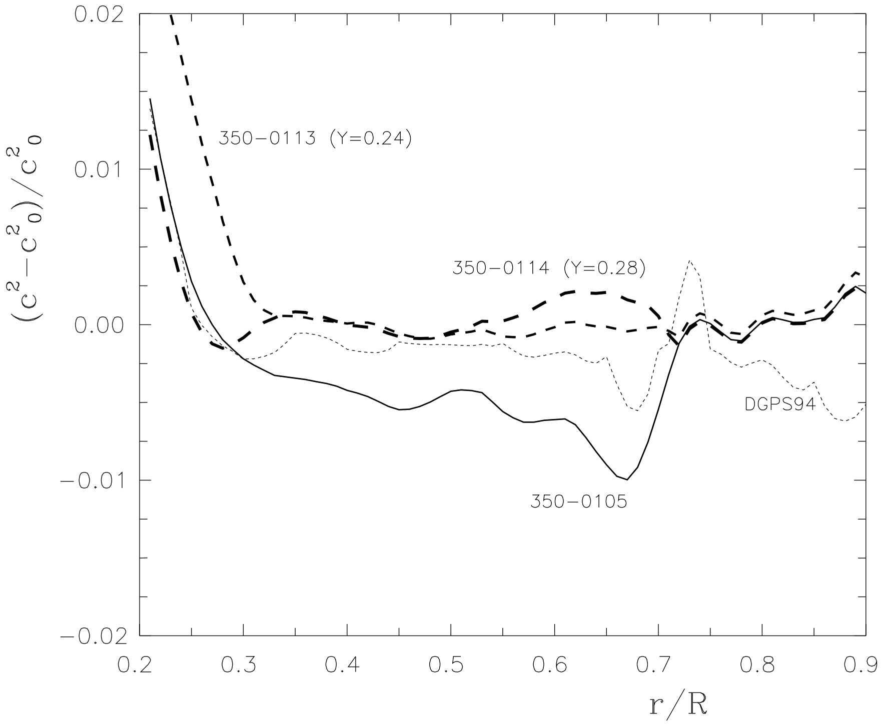

Рис. 5.7. Профили скорости звука, приведенные к гелиосейсмическим данным. Для сравнения даны также стандартная модель 350-0105 и гелиосейсмическая модель из Dziembowski et al. 1994 (DGPS94).

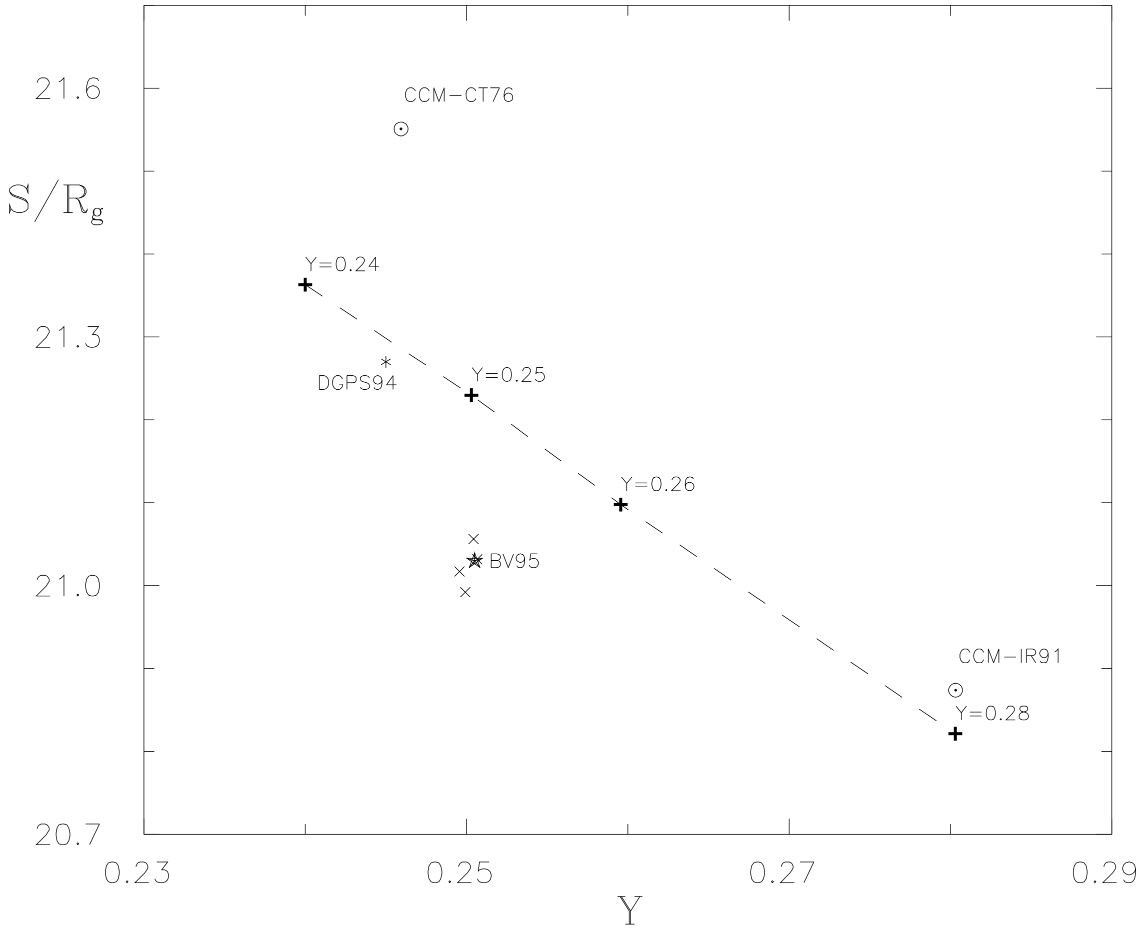

Рис. 5.8. Размещение моделей в плоскости Y-S. Показаны модели с исправленной скоростью звука и разным содержанием гелия в оболочке (штриховая линия); две стандартные модели с разными таблицами непрозрачностей (CCM-IR91 и CCM-CT76); сейсмическая модель из работы Dziembowski et al. 1994 (DGPS94); гелиосейсмические значения Y и S из Baturin, Vorontsov 1995 (BV95) и модели, приведенные к ним (косые крестики).

5.2.4. Обсуждение

На примере рассмотренных моделей мы имеем указание на противоречия в гелиосейсмических величинах параметров моделей, по крайней мере в классе моделей с классическим профилем химического состава. Низкое содержание гелия и малая энтропия требуют значительного, маловероятного с точки зрения возможных ошибок в теоретических непрозрачностях, понижения непрозрачности в ядре. Такое понижение эквивалентно понижению градиента температуры в ядре (и градиента скорости звука), и может быть обосновано лишь существованием дополнительных источников теплопереноса, помимо лучистого переноса (например, с помощью WIMP – слабовзаимодействующих, массивных частиц). С другой стороны, низкая энтропия в модели подтверждает относительно высокий уровень непрозрачности в лучистой зоне, примерно соответствующий таблицам OPAL (IR91).

Заметим, что поведение скорости звука в лучистой зоне не подвержено влиянию малой области близ дна конвективной зоны. Примерами такого рода рассогласования могут служить 350-0064 и 350-0081 (рис. 5.5), где глубина конвективной зоны завышена на полтора процента по сравнению с 350-0083 и 350-0080 за счет коррекции непрозрачности, которая, однако, быстро сходит на нет, т.е. в более глубоких слоях непрозрачности (и градиенты) в моделях похожи. (Попутно отметим, что с точки зрения поведения градиента температуры такая локальная коррекция непрозрачности качественно имитирует явление овершутинга). Очевидно, что эффект геометрического рассогласования глубин конвективной зоны за счет локальной коррекции непрозрачности существенно меньше, чем эффект от общей коррекции непрозрачности для построения модели с нужной энтропией. Эти эксперименты демонстрируют степень влияния ошибок в оценке глубины конвективной зоны на наши построения – возможные ошибки в определении геометрической глубины (вплоть до 1%) не сказываются на рассмотренных выводах о поведении профиля скорости звука в лучистой зоне.

Итак, независимо от наших представлений о строении модели в целом, анализ глубины конвективной зоны означает, что необходимо либо а) уменьшить непрозрачности OPAL на 30% в области температур около 2.3 млн. К; либо б) принять большую энтропию, например $S/R_g = 21.3$, либо в) принять большее содержание гелия в оболочке ($Y = 0.26 - 0.27$), в зависимости от того, какому определению мы придаем больший вес. Если мы признаем правильными оценки энтропии и содержания гелия в конвективной зоне, то сейсмическая глубина конвективной зоны ведет к противоречию с непрозрачностями OPAL. Если мы доверяем непрозрачностям, то мы должны признать наличие ошибки в оценке или гелия (на 1-2%) и/или энтропии (на 0.2 моль/г).

5.3. Другие пути построения гелиосейсмической модели

Итак, подбор непрозрачности в солнечной модели не позволяет построить модель Солнца, согласующуюся с гелиосейсмологическими данными. Даже отбрасывание гелиосейсмического определения энтропии конвективной зоны не приносит большой пользы, т.к. требуемая коррекция непрозрачности в этом случае весьма велика. Очевидно, что существуют иные подходы к варьированию модели Солнца. В этом параграфе будет кратко рассмотрена возможность получения гелиосейсмической модели за счет изменения профиля химического состава. Из всех предлагавшихся модификаций физический смысл имеют, по-видимому, две: перемешивание в центре и диффузия гелия в лучистой зоне. Физическая трактовка обоих явлений пока плохо разработана, но даже в этом виде весьма сложна и применяться здесь не будет; рассмотрим лишь некоторую простую аппроксимацию вышеупомянутых явлений. Ясность в понимании физических процессов здесь настолько мала, что неизвестно даже, играют ли вообще перемешивание и диффузия сколько-нибудь существенную роль в эволюции Солнца.

5.3.1. Профиль химического состава: перемешивание в центре

Как обычно, будем рассматривать класс нестандартных солнечных моделей, от которых требуется только то, чтобы они имели солнечные значения радиуса, светимости и массы. Вместо расчета эволюции для получения профиля химического состава в модели современного Солнца будем использовать произвольные профили $X(\mu)$, получаемые из профиля стандартной эволюционной модели $X_0(\mu)$ путем следующей модификации:

$$X(\mu) = X_0(\mu) + \delta X(X_{surf} - X_0(\mu)), \tag{5.8}$$

где δX является параметром модификации, а X_{surf} – содержанием водорода в оболочке модели. Очевидно, что новый профиль будет отличаться от стандартного только в области, где происходило заметное выгорание водорода, то есть при температурах выше 10 млн. K. Такого рода вариации в некоторой степени могут имитировать различные сложные эффекты в процессе солнечной эволюции, например, слабое или полное перемешивание, диффузию, гравитационное осаждение гелия и пр. Заметим, что такие вариации аналогичны также изменению возраста модели: чем больше возраст, чем сильнее выгорает водород в ядре. По-видимому, формула (5.8) не может точно воспроизвести профили содержания водорода в моделях с разным возрастом, но в данном случае этого и не требуется.

Несомненно, что возможно значительно более сложное поведение профиля в ядре, чем то, которое может быть описано выражением (5.8). Однако сравнение с некоторыми численными экспериментами на эту тему (см. Baturin, Ayukov 1993) показывает, что основные закономерности и соотношения проявляются даже при таких простых вариациях профиля химического состава. По-видимому, главной характеристикой является интеграл величины отклонения от стандартной модели, а не сам профиль коррекции. Поэтому в дальнейшем для простоты будем понимать под вариациями $X(\mu)$ в ядре вариации профиля, описываемые выражением (5.8).

Расчет статических (см. §4.3) моделей с профилем химического состава, измененным в соответствии с (5.8), не представляет трудностей. На рис. 5.2 значком "X_c" обозначена прямая, на которую ложатся модели с различными амплитудами δX. Как видим, она близка к прямой "K_c", т.е. изменение содержания водорода в этом смысле аналогично изменению непрозрачности. Модели Christensen-Dalsgaard (1992) показывают похожее поведение, и даже угол между прямыми, описывающими модификации непрозрачности и возраста, близок к полученному в данной работе (см. более подробно в Батурин, Аюков 1995).

Таким образом, уменьшение непрозрачности в ядре, требуемое для достижения низкого содержания гелия, можно заменить уменьшением содержания водорода. Однако если *увеличение* содержания водорода можно объяснить перемешиванием, то для уменьшения придется привлекать осаждение гелия. Кроме того, амплитуда коррекции профиля содержания водорода в этом случае должна быть достаточно велика (например, уменьшение Y в конвективной зоне с 0.28 до 0.25 требует понижения содержания водорода в центре с 0.35 до примерно 0.1); впрочем, оценки эффективности процессов диффузии пока весьма приблизительны и противоречивы.

5.3.2. Профиль химического состава: диффузия гелия

Мысль о том, что процесс гравитационного осаждения тяжелых элементов в течение солнечной эволюции играет весьма существенную роль, высказывалась в последние годы неоднократно (Bahcall, Pinsonneault 1992; Christensen-Dalsgaard, Profitt, Thompson 1993). По мнению авторов вышеуказанных статей, этот процесс может вести к градиенту содержания водорода в 3 процента между основанием конвективной зоны и центром модели; в остальном профиль химического состава почти не претерпевает изменений.

Рассчитать модель Солнца с измененным содержанием водорода в конвективной зоне несложно, и она оказывается по всем параметрам весьма близкой к стандартной – за исключением, конечно, содержания гелия в оболочке. Очевидно, химический состав влияет только на уравнение состояния и непрозрачность; непрозрачность в конвективной зоне роли не играет (это обсуждалось в гл. 4), а изменение уравнения состояния невелико (гораздо меньше, чем изменение непрозрачности). Это, по-видимому, и обуславливает практическое отсутствие влияния диффузии такого рода на модель Солнца; фактически при этом получаем лишь изменение смысла используемых величин (содержания гелия в оболочке).

Все гелиосейсмические методы определения гелия (в настоящее время, разумеется) реагируют на детали строения внешних слоев конвективной зоны. Это означает, что измеряется именно содержание гелия в оболочке (конвективной зоне); это хорошо совпадает с результатами моделирования модели с диффузией: $Y = 0.25$ в конвективной зоне, $Y = 0.28$ в лучистой зоне. Данное объяснение выглядело бы многообещающим, если бы не отсутствие надежной трактовки диффузионных процессов. Необходимо также помнить о том, что гелиосейсмический результат сильно зависит от тонких деталей термодинамики. Не исключено, что разрабатываемое сейчас уравнение состояния OPAL

(Rogers, Swenson, Iglesias 1996) значительно изменит Y, получаемый гелиосейсмическими методами.

5.4. Сейсмические характеристики солнечного ядра

Рассмотрим характеристики строения ядер полученных моделей. Модели 350-0111 – 350-0114 представляют семейство с практически одинаковыми оболочками (благодаря одной и той же скорости звука), но существенно отличающимися ядрами.

Общая тенденция в серии этой серии моделей – понижение центральной температуры и повышение центральной плотности (с понижением содержания гелия), что означает также понижение центральной скорости звука и увеличения частоты Брунта-Вяйсяля во внешней части ядра. Если сравнивать скорость звука в центре в этих моделях (см. табл. 5.1) со значениями, восстановленными по частотам ($c^2 = 2.626 \cdot 10^{15}$ см^2/с^2 для Vorontsov, Shibahashi 1991, $2.673 \cdot 10^{15}$ см^2/с^2 для Dziembowski *et al.* 1994, $2.520 \cdot 10^{15}$ см^2/с^2 для Antia, Basu 1994), то лучшей опять оказывается модель с $Y = 0.28$. Впрочем, разброс в оценках скорости звука в центральных областях пока еще велик. В работах Dziembowski *et al.* 1994 и Antia, Basu 1994 также оценивалась плотность в центре Солнца. Хотя надежность оценок центральной плотности невысокая (141 – 146.7 г/см^3 у Dziembowski *et al.* 1994 и 148 г/см^3 у Antia, Basu 1994), но и по этому параметру модель 350-0114, слабо отличающаяся от CCM-OPAL по глобальным характеристикам, оказывается лучшей.

Модель	$l = 0, 2$			$l = 0, 3$		
	δ	δ_0	$d\delta/dn$	δ	δ_0	$d\delta/dn$
350-0105 (CCM-IR91)	9.201	9.266	−0.3061	16.150	16.137	−0.4302
350-0113 ($Y = 0.24$)	8.570	8.657	−0.2950	15.335	15.341	−0.4215
350-0112 ($Y = 0.25$)	8.463	8.533	−0.2943	15.199	15.212	−0.4295
350-0111 ($Y = 0.26$)	8.157	8.233	−0.2928	14.799	14.830	−0.4313
350-0114 ($Y = 0.28$)	9.157	9.210	−0.3034	16.077	16.063	−0.4281
Наблюдения	8.960	9.040	−0.3044	15.770	15.747	−0.4435

Таблица 5.2. Малое расщепление частот акустических колебаний для моделей с исправленной скоростью звука. В качестве наблюдательных данных – результаты Elsworth et al. 1994.

Наиболее простым и общепризнанным сейсмическим тестом строения ядра является величина малого расщепления для частот мод низких степеней, а именно

$$\delta_l(n) = \nu_{l,n} - \nu_{l+2,n-1} \tag{5.9}$$

где l – степень моды, n – порядок моды. Нами были рассчитаны частоты колебаний в адиабатическом приближении с учетом возмущений гравитационного потенциала с помощью программы, любезно предоставленной С.В.Воронцовым. Для целей сравнения с данными наблюдений мы вычислили величины $\delta_0(21)$ и $\delta_1(21)$, а также аппроксимировали линейной зависимостью функции $\delta_l(n)$ для интервала n от 15 до 26. Параметры аппроксимации приведены в таблице 5.2. Сравнение с данными наблюдений Elsworth *et al.* 1994 показывает, что модели с сильно заниженной температурой и скоростью звука в ядре не согласуются с наблюдениями частот. В рассматриваемой серии моделей наиболее удовлетворительной с точки зрения сейсмических свойств ядра является модель 350-0114, максимально близкая к ССМ, хотя, вероятно, есть основания предполагать тенденцию к небольшому понижению центральной температуры.

Заключение

Приведем основные результаты, полученные в диссертации:

– подробно описаны детали расчета стандартной солнечной модели, достоинства и недостатки методов интегрирования уравнений строения звезд; обоснована необходимость достижения сравнительно высокой (10^{-5}) точности при расчетах; приведены основные трудности расчета и способы их преодоления; описана методика вычислений и даны численные оценки параметров, требуемые для достижения нужной точности;

– предлагается использовать удельную энтропию вещества адиабатической части конвективной зоны как важнейший параметр модели; обосновывается ее использование в этом качестве; приводится простой способ расчета энтропии;

– рассчитан набор стандартных моделей Солнца с различными таблицами непрозрачностей; изучено влияние величины непрозрачности в разных частях Солнца на модель Солнца; приведена связь между непрозрачностью и параметрами конвективной оболочки Солнца (содержанием гелия и удельной энтропией вещества);

– приводится постановка задачи о получении модели внутреннего строения Солнца, согласующейся с данными гелиосейсмологии; рассматривается возможность получения модели с помощью искусственного изменения непрозрачности; излагается метод расчета модели Солнца с наперед заданной скоростью звука; изучается связь глубины конвективной зоны (хорошо известной по гелиосейсмическим данным) с другими параметрами модели; показывается, что современная стандартная модель Солнца с таблицами непрозрачности Ливерморской лаборатории OPAL по многим параметрам близка к гелиосейсмическим оценкам, однако, содержание гелия в конвективной зоне в ней заметно (на 0.03 по массовой доле) выше и не может быть легко изменено путем изменения непрозрачности (требуемая коррекция неправдоподобно велика); обсуждаются другие методы преодоления этого противоречия (процессы, приводящие к изменению профиля химического состава).

Автор выражает глубокую признательность В.А.Батурину за постоянный интерес и большую помощь во время работы над диссертацией.

Автор благодарит W.Däppen, предоставившего таблицы уравнения состояния MHD и любезно вычислившего данные для расчета энтропии по этим таблицам, С.В.Воронцова за профиль скорости звука из работы Vorontsov, Shibahashi 1991 и за возможность использовать программу расчета собственных частот акустических колебаний Солнца. Автор благодарен J.Christensen-Dalsgaard за идею о сравнении точности расчетов, организацию такой программы в рамках GONG Model Team Project и за дополнительные данные о моделях из работы Christensen-Dalsgaard J., 1992. Автор благодарит А.А.Памятных за данные о структуре модели из работы Dziembowski, Goode, Pamyatnykh, Sienkiewicz 1994.

Модели Солнца

В приложении приведены данные об эволюции и внутреннем строении двух моделей Солнца: 350-0125 (стандартная модель с таблицами непрозрачностей IR91; см. гл. 4) и 350-0114 (модель с исправленным профилем скорости звука, наилучшим образом согласующаяся с данными по колебаниям низких степеней; см. гл. 5).

	350-0125	350-0114
Возраст, млрд. лет	4.750	–
Масса $M/M_\odot$	1.0	1.0
Параметр точности	5.0	5.0
Параметр теории конвекции α	1.632166929	1.652993184
Начальное содержание водорода X	0.699694299	0.699704022
Температура в центре T_c, млн. K	15.717097691	15.694890720
Плотность в центре ρ_c, г/см^3	150.83253764	152.26663972
Светимость $L/L_\odot$	1.000000240	0.999991684
Радиус $R/R_\odot$	1.000000174	1.000001372
Число шагов в эволюционном треке N	80	–
Энтропия вещества в конвективной зоне S/R, моль/г	20.8734	20.8214
Глубина конвективной зоны H_{bcz}/R	0.280980778	0.287707650
Масса конвективной зоны $1-(M_r/M)_{bcz}$	0.022760350	0.024882909
Температура у основания конвективной зоны T_{bcz}, млн. K	2.190696649	2.263192634
Плотность у основания конвективной зоны ρ_{bcz}, г/см^3	0.177164716	0.192234984
Содержание гелия в конвективной зоне Y	0.280305701	0.280295978
Поток нейтрино для детектора на основе Cl^{37}, SNU	8.506	8.349
Поток нейтрино для детектора на основе Ga^{71}, SNU	127.439	126.894
Поток нейтрино для детектора на основе In^{115}, SNU	618.565	617.677

Таблица 7.1. Характеристики моделей 350-0125 и 350-0114.

На следующих двух страницах приведен эволюционный трек для стандартной модели 350-0125. Обозначения: t – возраст модели (млрд. лет); T_c – температура в центре, K; ρ_c – плотность в центре, г/см^3; L, R – светимость и радиус соответственно, в солнечных единицах.

Далее даны таблицы, описывающие внутреннюю структуру моделей 350-0125 и 350-0114. Эти данные могут быть получены через Internet с сервера общего доступа `crydee.sai.msu.su`; ниже приведен пример сеанса:

```
$ftp crydee.sai.msu.su
220 crydee FTP server (Version wu-2.4) ready.
Name (crydee.sai.msu.su):  anonymous
331 Guest login ok, send your complete e-mail address as password.
Password:  <type your e-mail address here>
230 Guest login ok, access restrictions apply.
ftp> cd /pub/science/models/mde
250 CWD command successful.
ftp> bin
200 Type set to I.
ftp> get 350-0125.mde
200 PORT command successful.
150 Opening BINARY mode data connection for 350-0125.mde (380258 bytes).
226 Transfer complete.
380258 bytes received in 0,57 seconds (651 Kbytes/s)
ftp> get mde2dat.for
200 PORT command successful.
150 Opening BINARY mode data connection for mde2dat.for (2085 bytes).
226 Transfer complete.
2085 bytes received in 0,00 seconds (2 Kbytes/s)
ftp> quit
221 Goodbye.
$
```

Программа mde2dat.for предназначена для извлечения данных из двоичного файла 350-0125.mde; компиляция должна производиться Microsoft FORTRAN 5.x. Если у вас возникли трудности, напишите `asv@sai.msu.su` и автор снабдит вас необходимыми данными.

Обозначения в таблицах:

N – номер слоя (данные приведены через 9 слоев на 10-й);

r/R – доля радиуса;

μ – массовая координата $(M_r/M)^{2/3}$, используемая при интегрировании;

M_r/M – доля массы;

L_r/L – доля светимости, генерируемая внутри сферы радиуса r;

X – содержание водорода (по массе);

$\lg T$ – десятичный логарифм температуры в К;

$\lg \rho$ – десятичный логарифм плотности в г/см^3;

$\lg P$ – десятичный логарифм давления в дин/см^2;

ϵ – темп выделения энергии (включая гравитационные члены; см. §1.2), эрг/(г $\cdot$ с);

κ – непрозрачность, см^2/г;

N^2 – квадрат частоты Брунта-Вяйсяля;

$\lg U$ – десятичный логарифм внутренней энергии в эрг/см^3;

Q – $-(\partial \ln \rho/\partial \ln T)_P$;

Γ_1 – показатель адиабаты;

c^2 – скорость звука, см/с;

∇_{ad} – адиабатический градиент $(\partial \ln P/\partial \ln T)_{ad}$;

∇_{rad} – градиент, определяемый лучистой теплопроводностью (§1.2);

∇ – модельный градиент $d \log T/d \log P$;

χ_T – $(\partial \ln P/\partial \ln T)_{\rho,X}$;

χ_ρ – $(\partial \ln P/\partial \ln \rho)_{T,X}$;

χ_X – $(\partial \ln P/\partial \ln X)_{\rho,T}$;

t	$T_c/10^6$	ρ_c	L	R
0.00000	13.48420	80.60525	0.7202109	0.8880181
0.05938	13.50403	81.09616	0.7227123	0.8890108
0.11875	13.52348	81.57579	0.7250636	0.8899682
0.17813	13.54378	82.07940	0.7276034	0.8909704
0.23750	13.56374	82.58538	0.7301666	0.8919985
0.29688	13.58433	83.10071	0.7327326	0.8930105
0.35625	13.60480	83.62093	0.7353530	0.8940542
0.41563	13.62556	84.14751	0.7379539	0.8950843
0.47500	13.64639	84.68044	0.7406066	0.8961385
0.53438	13.66741	85.21954	0.7432573	0.8971908
0.59375	13.68856	85.76535	0.7459420	0.8982564
0.65313	13.70987	86.31758	0.7486402	0.8993280
0.71250	13.73134	86.87666	0.7513620	0.9004086
0.77187	13.75297	87.44250	0.7541047	0.9014981
0.83125	13.77475	88.01531	0.7568673	0.9025953
0.89062	13.79670	88.59519	0.7596529	0.9037018
0.95000	13.81882	89.18226	0.7624594	0.9048168
1.00938	13.84110	89.77665	0.7652883	0.9059407
1.06875	13.86355	90.37847	0.7681393	0.9070737
1.12813	13.88618	90.98788	0.7710127	0.9082156
1.18750	13.90898	91.60498	0.7739111	0.9093686
1.24688	13.93195	92.22997	0.7768274	0.9105269
1.30625	13.95509	92.86286	0.7797715	0.9116976
1.36563	13.97843	93.50395	0.7827343	0.9128752
1.42500	14.00194	94.15330	0.7857256	0.9140651
1.48438	14.02565	94.81107	0.7887370	0.9152626
1.54375	14.04953	95.47744	0.7917754	0.9164713
1.60313	14.07362	96.15254	0.7948364	0.9176891
1.66250	14.09789	96.83657	0.7979232	0.9189174
1.72188	14.12236	97.52965	0.8010346	0.9201557
1.78125	14.14703	98.23199	0.8041715	0.9214044
1.84063	14.17191	98.94373	0.8073335	0.9226632
1.90000	14.19699	99.66507	0.8105217	0.9239328
1.95937	14.22227	100.39619	0.8137357	0.9252128
2.01875	14.24777	101.13727	0.8169763	0.9265038
2.07813	14.27348	101.88852	0.8202432	0.9278053
2.13750	14.29941	102.65013	0.8235375	0.9291181
2.19688	14.32557	103.42230	0.8268585	0.9304418
2.25625	14.35194	104.20526	0.8302074	0.9317769
2.31563	14.37854	104.99921	0.8335839	0.9331233
2.37500	14.40537	105.80438	0.8369886	0.9344813
2.43438	14.43244	106.62101	0.8404216	0.9358509
2.49375	14.45974	107.44932	0.8438834	0.9372323

t	$T_c/10^6$	ρ_c	L	R
2.55313	14.48729	108.28957	0.8473743	0.9386256
2.61250	14.51508	109.14201	0.8508944	0.9400309
2.67188	14.54312	110.00689	0.8544442	0.9414484
2.73125	14.57142	110.88449	0.8580239	0.9428783
2.79063	14.59997	111.77510	0.8616345	0.9443211
2.85000	14.62878	112.67902	0.8652744	0.9457756
2.90938	14.65786	113.59651	0.8689462	0.9472435
2.96875	14.68721	114.52789	0.8726487	0.9487240
3.02813	14.71683	115.47345	0.8763832	0.9502178
3.08750	14.74673	116.43350	0.8801493	0.9517247
3.14688	14.77692	117.40838	0.8839478	0.9532450
3.20625	14.80739	118.39839	0.8877789	0.9547789
3.26563	14.83815	119.40390	0.8916428	0.9563265
3.32500	14.86922	120.42523	0.8955400	0.9578879
3.38438	14.90058	121.46275	0.8994709	0.9594634
3.44375	14.93226	122.51684	0.9034356	0.9610530
3.50313	14.96424	123.58786	0.9074349	0.9626571
3.56250	14.99655	124.67621	0.9114684	0.9642756
3.62188	15.02917	125.78230	0.9155373	0.9659090
3.68125	15.06212	126.90654	0.9196413	0.9675571
3.74063	15.09540	128.04937	0.9237813	0.9692204
3.80000	15.12902	129.21123	0.9279573	0.9708989
3.85938	15.16299	130.39260	0.9321698	0.9725929
3.91875	15.19730	131.59395	0.9364192	0.9743025
3.97813	15.23196	132.81579	0.9407058	0.9760280
4.03750	15.26698	134.05866	0.9450301	0.9777694
4.09688	15.30237	135.32309	0.9493925	0.9795272
4.15625	15.33812	136.60965	0.9537931	0.9813014
4.21563	15.37425	137.91893	0.9582326	0.9830923
4.27500	15.41076	139.25152	0.9627113	0.9849001
4.33438	15.44765	140.60806	0.9672295	0.9867251
4.39375	15.48493	141.98921	0.9717878	0.9885674
4.45313	15.52261	143.39563	0.9763863	0.9904273
4.51250	15.56069	144.82804	0.9810257	0.9923051
4.57188	15.59917	146.28716	0.9857064	0.9942011
4.63125	15.63806	147.77375	0.9904287	0.9961153
4.69063	15.67737	149.28860	0.9951932	0.9980483
4.75000	15.71710	150.83253	1.0000002	1.0000002
4.75000	15.71710	150.83254	1.0000002	1.0000002

Модель 350-0125

N	r/R	μ	M_r/M	L_r/L	X	lg T	lg ρ	lg P	ε	κ	N^2
1	.0000000+00	.0000000+00	.0000000+00	.0000000+00	.3322215716	7.1963724	2.1784950	17.3613124	.1676521+02	.1318343+01	.0000000+00
10	.2868195-04	.1855195-07	.2526878-11	.2190881-10	.3322215989	7.1963723	2.1784950	17.3613123	.1676521+02	.1318343+01	.2771467-11
20	.6738197-04	.1023904-06	.3276341-10	.2840688-09	.3322217222	7.1963723	2.1784949	17.3613122	.1676521+02	.1318343+01	.1529605-10
30	.1401633-03	.4430373-06	.2948902-09	.2556787-08	.3322222233	7.1963722	2.1784944	17.3613118	.1676519+02	.1318343+01	.6618492-10
40	.2627129-03	.1556446-05	.1941784-08	.1683582-07	.3322238609	7.1963717	2.1784926	17.3613104	.1676513+02	.1318345+01	.2325140-09
50	.4516472-03	.4600106-05	.9866241-08	.8554262-07	.3322283378	7.1963704	2.1784879	17.3613064	.1676498+02	.1318350+01	.6871841-09
60	.7246404-03	.1184158-04	.4074879-07	.3532968-06	.3322389889	7.1963673	2.1784768	17.3612971	.1676461+02	.1318361+01	.1768853-08
70	.1099445-02	.2725854-04	.1423161-06	.1233862-05	.3322616642	7.1963608	2.1784530	17.3612772	.1676382+02	.1318384+01	.4071313-08
80	.1593288-02	.5724337-04	.4330996-06	.3754712-05	.3323057632	7.1963481	2.1784067	17.3612386	.1676228+02	.1318429+01	.8547911-08
90	.2223578-02	.1114829-03	.1177097-05	.1020370-04	.3323855248	7.1963251	2.1783230	17.3611686	.1675949+02	.1318511+01	.1664054-07
100	.3006678-02	.2038075-03	.2909579-05	.2521750-04	.3325212651	7.1962860	2.1781805	17.3610496	.1675475+02	.1318651+01	.3040047-07
110	.3958667-02	.3532255-03	.6638623-05	.5752154-04	.3327408749	7.1962227	2.1779500	17.3608569	.1674707+02	.1318877+01	.5262939-07
120	.5095286-02	.5849896-03	.1414889-04	.1225433-03	.3330813381	7.1961245	2.1775927	17.3605581	.1673516+02	.1319228+01	.8701100-07
130	.6431999-02	.9317278-03	.2844026-04	.2461634-03	.3335902983	7.1959776	2.1770583	17.3601110	.1671732+02	.1319753+01	.1382270-06
140	.7984162-02	.1434649-02	.5433986-04	.4698998-03	.3343276575	7.1957644	2.1762838	17.3594625	.1669142+02	.1320515+01	.2120422-06
150	.9767148-02	.2144790-02	.9932926-04	.8578147-03	.3353671090	7.1954634	2.1751914	17.3585467	.1665479+02	.1321590+01	.3153298-06
160	.1179685-01	.3124482-02	.1746494-03	.1505545-02	.3367977915	7.1950480	2.1736868	17.3572832	.1660415+02	.1323074+01	.4560291-06
170	.1409081-01	.4449416-02	.2967936-03	.2552167-02	.3387265155	7.1944859	2.1716564	17.3555742	.1653547+02	.1325082+01	.6430440-06
180	.1666778-01	.6210185-02	.4893919-03	.4194486-02	.3412787607	7.1937386	2.1689657	17.3533025	.1644389+02	.1327752+01	.8858638-06
190	.1952524-01	.8494568-02	.7829103-03	.6681322-02	.3445713556	7.1927683	2.1654879	17.3503545	.1632461+02	.1331219+01	.1191396-05
200	.2260579-01	.1134088-01	.1207731-02	.1025107-01	.3486443709	7.1915583	2.1611749	17.3466799	.1617536+02	.1335541+01	.1557519-05
210	.2589297-01	.1480667-01	.1801715-02	.1519128-01	.3535595381	7.1900835	2.1559532	17.3422033	.1599290+02	.1340811+01	.1982310-05
220	.2938940-01	.1896478-01	.2611692-02	.2184357-01	.3593922832	7.1883118	2.1497309	17.3368289	.1577323+02	.1347142+01	.2462889-05
230	.3309797-01	.2388848-01	.3692180-02	.3058322-01	.3662083210	7.1862110	2.1424215	17.3304596	.1551254+02	.1354652+01	.2993203-05
240	.3703951-01	.2967758-01	.5112611-02	.4186393-01	.3740970009	7.1837369	2.1339059	17.3229624	.1520593+02	.1363501+01	.3566505-05
250	.4123434-01	.3643886-01	.6955801-02	.5618529-01	.3831398713	7.1808421	2.1240637	17.3141938	.1484862+02	.1373864+01	.4172660-05
260	.4571116-01	.4430058-01	.9324255-02	.7411547-01	.3934255801	7.1774692	2.1127535	17.3039791	.1443545+02	.1385957+01	.4799245-05
270	.5051605-01	.5343451-01	.1235187-01	.9633923-01	.4050707870	7.1735412	2.0997839	17.2920833	.1396001+02	.1400073+01	.5432572-05
280	.5572219-01	.6408674-01	.1622379-01	.1237358+00	.4182453511	7.1689480	2.0848754	17.2781679	.1341350+02	.1416640+01	.6057602-05
290	.6143267-01	.7660021-01	.2120044-01	.1574337+00	.4331763750	7.1635353	2.0676382	17.2617595	.1278428+02	.1436275+01	.6656436-05
300	.6781555-01	.9151542-01	.2768480-01	.1990566+00	.4502262327	7.1570593	2.0474475	17.2421066	.1205416+02	.1459976+01	.7209482-05
310	.7521725-01	.1098978+00	.3643206-01	.2515786+00	.4701621035	7.1490400	2.0230338	17.2177249	.1118550+02	.1489729+01	.7697024-05
320	.8506516-01	.1358990+00	.5009846-01	.3263893+00	.4964181847	7.1376202	1.9892485	17.1828832	.1001646+02	.1533005+01	.8110518-05
330	.9446384-01	.1620650+00	.6524298-01	.4003987+00	.5206513494	7.1260295	1.9559509	17.1473318	.8910398+01	.1577941+01	.8289399-05
340	.1038197+00	.1891468+00	.8226186-01	.4739980+00	.5435292230	7.1139213	1.9220438	17.1099312	.7840412+01	.1625823+01	.8294220-05
350	.1132999+00	.2173955+00	.1013621+00	.5462109+00	.5651133051	7.1011638	1.8870928	17.0701708	.6806855+01	.1677093+01	.8171383-05
360	.1263277+00	.2571341+00	.1303886+00	.6382212+00	.5917484097	7.0829886	1.8382728	17.0127383	.5498935+01	.1751239+01	.7887435-05
370	.1412130+00	.3032479+00	.1669924+00	.7294671+00	.6175836314	7.0615482	1.7814636	16.9434930	.4198002+01	.1841141+01	.7518681-05
380	.1574961+00	.3538072+00	.2104505+00	.8100648+00	.6402747808	7.0375687	1.7179910	16.8636975	.3033669+01	.1946681+01	.7172981-05
390	.1758426+00	.4100074+00	.2625352+00	.8775244+00	.6595130570	7.0102339	1.6445421	16.7691687	.2036502+01	.2075444+01	.6935570-05
400	.1967625+00	.4719803+00	.3242543+00	.9290198+00	.6747105548	6.9790607	1.5578765	16.6560391	.1248635+01	.2235151+01	.6875023-05
410	.2246454+00	.5493131+00	.4071270+00	.9677507+00	.6869152936	6.9381317	1.4370413	16.4977441	.6231451+00	.2472848+01	.7021833-05
420	.2641196+00	.6455602+00	.5186867+00	.9903882+00	.6949769815	6.8823596	1.2561308	16.2628999	.2208460+00	.2878443+01	.7224422-05
430	.3048932+00	.7270850+00	.6199802+00	.9975012+00	.6980582949	6.8278907	1.0606097	16.0132152	.7295041-01	.3412054+01	.7056750-05
440	.3435712+00	.7884774+00	.7001384+00	.9993898+00	.6990997874	6.7790468	.8715688	15.7751907	.2487001-01	.4038571+01	.6555618-05
450	.3663235+00	.8182107+00	.7401126+00	.9997707+00	.6993659617	6.7515036	.7602881	15.6362450	.1295256-01	.4462007+01	.6170260-05
460	.3875005+00	.8421961+00	.7728938+00	.9999348+00	.6995047794	6.7266046	.6572953	15.5082577	.6861549-02	.4894423+01	.5782055-05
470	.4083094+00	.8627085+00	.8013018+00	.1000009+01	.6995834582	6.7027786	.5570001	15.3840676	.3475633-02	.5359342+01	.5388070-05

480	.4287075+00	.8802342+00	.8258428+00	.1000040+01	.6996285458	6.6799733	.4598181	15.2640400	.1574094-02	.5857223+01	.5000850-05
490	.4485326+00	.8951236+00	.8468851+00	.1000051+01	.6996545864	6.6582660	.3666220	15.1491225	.4995098-03	.6381317+01	.4633108-05
500	.4676090+00	.9077044+00	.8648019+00	.1000053+01	.6996697860	6.6377490	.2782254	15.0402128	-.1122400-03	.6922650+01	.4293316-05
510	.4856806+00	.9182361+00	.8798965+00	.1000050+01	.6996787464	6.6186002	.1957070	14.9385587	-.4615819-03	.7470802+01	.3986450-05
520	.5023586+00	.9268992+00	.8923778+00	.1000047+01	.6996840655	6.6011293	.1206418	14.8460387	-.6599924-03	.8011908+01	.3715972-05
530	.5168473+00	.9336912+00	.9022044+00	.1000043+01	.6996871813	6.5860640	.0562992	14.7666455	-.7691780-03	.8515608+01	.3489562-05
540	.5295304+00	.9391315+00	.9101010+00	.1000040+01	.6996891196	6.5729226	.0006501	14.6978640	-.8309551-03	.8985704+01	.3297393-05
550	.5436337+00	.9446780+00	.9181754+00	.1000036+01	.6996906644	6.5583165	-.0604844	14.6221305	-.8738644-03	.9539816+01	.3091078-05
560	.5608497+00	.9508007+00	.9271163+00	.1000032+01	.6996919454	6.5404310	-.1340541	14.5306787	-.9014181-03	.1025650+02	.2851164-05
570	.5798221+00	.9568139+00	.9359254+00	.1000028+01	.6996928481	6.5205581	-.2138150	14.4310436	-.9123504-03	.1109353+02	.2601996-05
580	.5997522+00	.9624020+00	.9441365+00	.1000024+01	.6996934339	6.4993655	-.2961636	14.3274973	-.9121999-03	.1203286+02	.2353647-05
590	.6199269+00	.9673942+00	.9514922+00	.1000021+01	.6996937938	6.4773814	-.3780514	14.2236125	-.9079154-03	.1306791+02	.2108666-05
600	.6399763+00	.9717776+00	.9579666+00	.1000018+01	.6996940097	6.4547037	-.4579473	14.1210208	-.9042697-03	.1420992+02	.1862052-05
610	.6595301+00	.9755685+00	.9635775+00	.1000015+01	.6996941368	6.4313582	-.5343596	14.0212314	-.9054119-03	.1547280+02	.1605125-05
620	.6780120+00	.9787672+00	.9683204+00	.1000013+01	.6996942098	6.4075514	-.6050010	13.9267233	-.9180650-03	.1690062+02	.1319664-05
630	.6948780+00	.9814006+00	.9722311+00	.1000011+01	.6996942512	6.3833975	-.6676526	13.8398348	-.9460671-03	.1859538+02	.9693722-06
640	.7160311+00	.9843738+00	.9766526+00	.1000009+01	.6996942796	6.3467581	-.7418425	13.7288068	-.1035041-02	.2195059+02	.1829360-06
650	.7446473+00	.9879246+00	.9819417+00	.1000006+01	.6996942942	6.2842823	-.8370721	13.5706442	-.9442647-03	.2985730+02	-.1269083-11
660	.7733516+00	.9909831+00	.9865052+00	.1000004+01	.6996942981	6.2162494	-.9403038	13.3988839	-.8073857-03	.3995272+02	-.2609151-11
670	.7990542+00	.9933028+00	.9899711+00	.1000002+01	.6996942989	6.1495919	-1.0414145	13.2306370	-.6929399-03	.5123510+02	-.4063110-11
680	.8232392+00	.9951347+00	.9927109+00	.1000001+01	.6996942991	6.0804118	-1.1463522	13.0560189	-.5883257-03	.6500127+02	-.6074704-11
690	.8424508+00	.9963556+00	.9945384+00	.1000001+01	.6996942991	6.0196711	-1.2384915	12.9026573	-.5163256-03	.8227162+02	-.8564631-11
700	.8594153+00	.9972681+00	.9959049+00	.1000001+01	.6996942991	5.9605466	-1.3281783	12.7533342	-.4564258-03	.7943027+02	-.1178112-10
710	.8749032+00	.9979709+00	.9969579+00	.1000000+01	.6996942991	5.9008481	-1.4187703	12.6024375	-.3911790-03	.7271330+02	-.1637304-10
720	.8881106+00	.9984762+00	.9977152+00	.1000000+01	.6996942991	5.8444758	-1.5044044	12.4597769	-.3270091-03	.8807791+02	-.2279343-10
730	.9003302+00	.9988702+00	.9983058+00	.1000000+01	.6996942991	5.7866107	-1.5923932	12.3131389	-.2639069-03	.1104347+03	-.3216320-10
740	.9115851+00	.9991735+00	.9987605+00	.1000000+01	.6996942991	5.7270835	-1.6829400	12.1621562	-.2061551-03	.1433371+03	-.4607407-10
750	.9213754+00	.9993932+00	.9990899+00	.1000000+01	.6996942991	5.6690671	-1.7712433	12.0148308	-.1587668-03	.1935264+03	-.6573412-10
760	.9299710+00	.9995540+00	.9993311+00	.1000000+01	.6996942991	5.6120124	-1.8582234	11.8696878	-.1209008-03	.2708587+03	-.9368251-10
770	.9376423+00	.9996735+00	.9995103+00	.1000000+01	.6996942991	5.5549194	-1.9454776	11.7240963	-.9092716-04	.3837847+03	-.1341904-09
780	.9443962+00	.9997610+00	.9996415+00	.1000000+01	.6996942991	5.4985005	-2.0319898	11.5797836	-.6796248-04	.5439363+03	-.1923211-09
790	.9500853+00	.9998225+00	.9997337+00	.1000000+01	.6996942991	5.4453059	-2.1139187	11.4432175	-.5129013-04	.7854828+03	-.2711203-09
800	.9551531+00	.9998683+00	.9998025+00	.1000000+01	.6996942991	5.3924473	-2.1958533	11.3068263	-.3856017-04	.1183592+04	-.3827061-09
810	.9595735+00	.9999018+00	.9998528+00	.1000000+01	.6996942991	5.3411484	-2.2761365	11.1734979	-.2909747-04	.1765532+04	-.5363524-09
820	.9634585+00	.9999266+00	.9998898+00	.1000000+01	.6996942991	5.2912191	-2.3553751	11.0423949	-.2202928-04	.2623943+04	-.7468975-09
830	.9668758+00	.9999448+00	.9999173+00	.1000000+01	.6996942991	5.2428624	-2.4336523	10.9136282	-.1675614-04	.3976516+04	-.1031700-08
840	.9699506+00	.9999587+00	.9999380+00	.1000000+01	.6996942991	5.1952493	-2.5128470	10.7844192	-.1274406-04	.5912395+04	-.1421695-08
850	.9727492+00	.9999692+00	.9999538+00	.1000000+01	.6996942991	5.1480702	-2.5941172	10.6532574	-.9673567-05	.8738554+04	-.1961137-08
860	.9753565+00	.9999773+00	.9999660+00	.1000000+01	.6996942991	5.1003216	-2.6797722	10.5168129	-.7289914-05	.1252635+05	-.2734651-08
870	.9777752+00	.9999835+00	.9999753+00	.1000000+01	.6996942991	5.0520194	-2.7698601	10.3751326	-.5468420-05	.1619108+05	-.3871294-08
880	.9800111+00	.9999882+00	.9999822+00	.1000000+01	.6996942991	5.0027303	-2.8641288	10.2281737	-.4096680-05	.2123281+05	-.5600275-08
890	.9820554+00	.9999916+00	.9999874+00	.1000000+01	.6996942991	4.9519773	-2.9612223	10.0769126	-.3084262-05	.2614480+05	-.8300673-08
900	.9837511+00	.9999939+00	.9999908+00	.1000000+01	.6996942991	4.9039321	-3.0511156	9.9357903	-.2404150-05	.3127579+05	-.1209115-07
910	.9852097+00	.9999955+00	.9999933+00	.1000000+01	.6996942991	4.8569626	-3.1368795	9.7997994	-.1924461-05	.3534922+05	-.1734833-07
920	.9864259+00	.9999966+00	.9999950+00	.1000000+01	.6996942991	4.8132484	-3.2162645	9.6732714	-.1592749-05	.4279515+05	-.2403682-07
930	.9875125+00	.9999975+00	.9999962+00	.1000000+01	.6996942991	4.7706702	-3.2953591	9.5476261	-.1345112-05	.5309611+05	-.3278322-07
940	.9884953+00	.9999981+00	.9999972+00	.1000000+01	.6996942991	4.7295340	-3.3757129	9.4214965	-.1158226-05	.6616826+05	-.4414482-07
950	.9893956+00	.9999986+00	.9999979+00	.1000000+01	.6996942991	4.6899647	-3.4588304	9.2934499	-.1016051-05	.7994997+05	-.5895934-07
960	.9902249+00	.9999989+00	.9999984+00	.1000000+01	.6996942991	4.6521731	-3.5454636	9.1630387	-.9081062-06	.9152519+05	-.7841393-07
970	.9909933+00	.9999992+00	.9999988+00	.1000000+01	.6996942991	4.6160982	-3.6361715	9.0297955	-.8264016-06	.9781263+05	-.1043300-06
980	.9917052+00	.9999994+00	.9999991+00	.1000000+01	.6996942991	4.5816954	-3.7307366	8.8940570	-.7651348-06	.9563403+05	-.1391888-06
990	.9923579+00	.9999996+00	.9999994+00	.1000000+01	.6996942991	4.5491531	-3.8275951	8.7577069	-.7200152-06	.8670980+05	-.1858478-06

1000	.9929538+00	.9999997+00	.9999995+00	.1000000+01	.6996942991	4.5183917	-3.9256350	8.6217746	-.6870538-06	.7579926+05	-.2478133-06
1010	.9934980+00	.9999998+00	.9999997+00	.1000000+01	.6996942991	4.4892741	-4.0242267	8.4867061	-.6630251-06	.6405648+05	-.3293787-06
1020	.9939982+00	.9999998+00	.9999998+00	.1000000+01	.6996942991	4.4615568	-4.1235935	8.3520130	-.6454228-06	.5273617+05	-.4362290-06
1030	.9944626+00	.9999999+00	.9999998+00	.1000000+01	.6996942991	4.4349765	-4.2245617	8.2166087	-.6324314-06	.4329365+05	-.5762491-06
1040	.9948964+00	.9999999+00	.9999999+00	.1000000+01	.6996942991	4.4094223	-4.3276610	8.0799384	-.6228268-06	.3519839+05	-.7600016-06
1050	.9953027+00	.9999999+00	.9999999+00	.1000000+01	.6996942991	4.3848576	-4.4330172	7.9419301	-.6157447-06	.2805761+05	-.1001520-05
1060	.9956828+00	.1000000+01	.9999999+00	.1000000+01	.6996942991	4.3612963	-4.5402614	7.8029999	-.6105528-06	.2242174+05	-.1318990-05
1070	.9960424+00	.1000000+01	.9999999+00	.1000000+01	.6996942991	4.3384415	-4.6502724	7.6618392	-.6067255-06	.1814898+05	-.1742408-05
1080	.9963836+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	4.3161559	-4.7632625	7.5180414	-.6039129-06	.1479789+05	-.2312129-05
1090	.9966983+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	4.2949993	-4.8757092	7.3759796	-.6019110-06	.1208238+05	-.3056700-05
1100	.9969955+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	4.2743757	-4.9899932	7.2325151	-.6004538-06	.9706042+04	-.4052610-05
1110	.9972763+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	4.2541879	-5.1059375	7.0876957	-.5993969-06	.7618044+04	-.5390973-05
1120	.9975423+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	4.2342745	-5.2236812	6.9411356	-.5986313-06	.5967286+04	-.7204133-05
1130	.9977953+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	4.2144413	-5.3435481	6.7922428	-.5980771-06	.4702433+04	-.9687414-05
1140	.9980367+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	4.1944660	-5.4658904	6.6403504	-.5976767-06	.3633649+04	-.1313757-04
1150	.9982684+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	4.1740042	-5.5914746	6.4841727	-.5973876-06	.2669801+04	-.1803852-04
1160	.9984898+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	4.1528368	-5.7197303	6.3239339	-.5971813-06	.1889675+04	-.2511309-04
1170	.9986914+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	4.1315731	-5.8444364	6.1668279	-.5970408-06	.1337415+04	-.3501556-04
1180	.9988674+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	4.1106935	-5.9601493	6.0191803	-.5969479-06	.9392968+03	-.4836864-04
1190	.9990198+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	4.0899121	-6.0659432	5.8817478	-.5968856-06	.6400576+03	-.6627766-04
1200	.9991502+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	4.0689097	-6.1608616	5.7553332	-.5968433-06	.4203420+03	-.9025496-04
1210	.9992603+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	4.0473135	-6.2440825	5.6405883	-.5968142-06	.2656641+03	-.1225018-03
1220	.9993518+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	4.0246605	-6.3149920	5.5379610	-.5967939-06	.1603346+03	-.1665577-03
1230	.9994273+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	4.0001628	-6.3735558	5.4469758	-.5967796-06	.9076034+02	-.2292417-03
1240	.9994897+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.9721947	-6.4202347	5.3657210	-.5967690-06	.4637309+02	-.3263023-03
1250	.9995389+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.9401061	-6.4528087	5.2962071	-.5967615-06	.2118596+02	-.4836440-03
1260	.9995716+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.9087222	-6.4689412	5.2460024	-.5967567-06	.9864522+01	-.6972792-03
1270	.9995926+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.8810064	-6.4745880	5.2113486	-.5967537-06	.5055391+01	-.9086115-03
1280	.9996113+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.8505777	-6.4765432	5.1782181	-.5967511-06	.2430289+01	-.9641977-03
1290	.9996319+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.8196787	-6.4845550	5.1389302	-.5967482-06	.1149445+01	-.4704079-03
1300	.9996467+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.8036346	-6.4979933	5.1093385	-.5967462-06	.7771818+00	-.1591437-03
1310	.9996525+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.7980854	-6.5043407	5.0974108	-.5967455-06	.6793054+00	-.6472560-04
1320	.9996585+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.7926352	-6.5115526	5.0847202	-.5967447-06	.5955966+00	.2151270-04
1330	.9996646+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.7875772	-6.5193470	5.0718430	-.5967439-06	.5276469+00	.9623290-04
1340	.9996713+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.7824594	-6.5284058	5.0576430	-.5967431-06	.4674165+00	.1667144-03
1350	.9996782+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.7775059	-6.5383884	5.0426860	-.5967422-06	.4164041+00	.2301543-03
1360	.9996854+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.7727150	-6.5492696	5.0269953	-.5967413-06	.3731333+00	.2871943-03
1370	.9996928+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.7680861	-6.5610142	5.0106049	-.5967405-06	.3363707+00	.3384570-03
1380	.9997004+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.7636196	-6.5735771	4.9935602	-.5967396-06	.3050845+00	.3845416-03
1390	.9997082+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.7593167	-6.5869027	4.9759174	-.5967387-06	.2784104+00	.4260001-03
1400	.9997162+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.7551791	-6.6009256	4.9577434	-.5967379-06	.2556229+00	.4633373-03
1410	.9997243+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.7512082	-6.6155714	4.9391136	-.5967370-06	.2361121+00	.4970130-03
1420	.9997325+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.7474050	-6.6307583	4.9201111	-.5967362-06	.2193539+00	.5274586-03
1430	.9997407+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.7437695	-6.6464027	4.9008193	-.5967354-06	.2048152+00	.5551960-03
1440	.9997490+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.7402998	-6.6624292	4.8813121	-.5967347-06	.1920284+00	.5807159-03
1450	.9997573+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.7369916	-6.6787713	4.8616518	-.5967339-06	.1806367+00	.6043922-03
1460	.9997655+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.7338375	-6.6953703	4.8418901	-.5967332-06	.1703672+00	.6265092-03
1470	.9997737+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.7308268	-6.7121733	4.8220689	-.5967325-06	.1610098+00	.6472835-03
1480	.9997819+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.7279451	-6.7291326	4.8022217	-.5967319-06	.1524025+00	.6668812-03
1490	.9997900+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.7251748	-6.7462045	4.7823745	-.5967312-06	.1444197+00	.6854329-03
1500	.9997981+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.7224960	-6.7633495	4.7625467	-.5967306-06	.1369627+00	.7030423-03
1510	.9998061+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.7198871	-6.7805322	4.7427516	-.5967301-06	.1299527+00	.7197819-03

1520	.9998140+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.7173262	-6.7977225	4.7229973	-.5967295-06	.1233260+00	.7357151-03
1530	.9998219+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.7147928	-6.8148961	4.7032868	-.5967290-06	.1170306+00	.7509030-03
1540	.9998297+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.7122680	-6.8320361	4.6836183	-.5967285-06	.1110236+00	.7654046-03
1550	.9998374+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.7097367	-6.8491332	4.6639853	-.5967281-06	.1052695+00	.7792746-03
1560	.9998451+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.7071870	-6.8661869	4.6443766	-.5967276-06	.9973904-01	.7925619-03
1570	.9998528+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.7046115	-6.8832056	4.6247759	-.5967272-06	.9440808-01	.8053076-03
1580	.9998604+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.7020068	-6.9002070	4.6051620	-.5967268-06	.8925714-01	.8175445-03
1590	.9998680+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.6993734	-6.9172178	4.5855086	-.5967264-06	.8427003-01	.8292973-03
1600	.9998755+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.6967153	-6.9342736	4.5657841	-.5967260-06	.7944155-01	.8405921-03
1610	.9998831+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.6940395	-6.9514146	4.5459556	-.5967256-06	.7478355-01	.8514680-03
1620	.9998906+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.6913551	-6.9686833	4.5259904	-.5967253-06	.7030958-01	.8619643-03
1630	.9998982+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.6886731	-6.9861221	4.5058575	-.5967249-06	.6603201-01	.8721182-03
1640	.9999058+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.6860053	-7.0037729	4.4855274	-.5967246-06	.6196129-01	.8819653-03
1650	.9999134+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.6833642	-7.0216754	4.4649733	-.5967243-06	.5810523-01	.8915384-03
1660	.9999211+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.6807620	-7.0398665	4.4441712	-.5967240-06	.5446868-01	.9008669-03
1670	.9999288+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.6782107	-7.0583790	4.4231003	-.5967237-06	.5105335-01	.9099760-03
1680	.9999366+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.6757212	-7.0772415	4.4017436	-.5967234-06	.4785802-01	.9188857-03
1690	.9999445+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.6733036	-7.0964773	4.3800876	-.5967232-06	.4487937-01	.9276045-03
1700	.9999524+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.6709665	-7.1161041	4.3581233	-.5967229-06	.4211216-01	.9360863-03
1710	.9999604+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.6687173	-7.1361333	4.3358457	-.5967227-06	.3954862-01	.9442667-03
1720	.9999685+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.6665618	-7.1565708	4.3132549	-.5967224-06	.3717887-01	.9520969-03
1730	.9999766+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.6645046	-7.1774170	4.2903546	-.5967222-06	.3499152-01	.9595436-03
1740	.9999848+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.6625488	-7.1986676	4.2671522	-.5967220-06	.3297415-01	.9665882-03
1750	.9999931+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.6606961	-7.2203141	4.2436575	-.5967217-06	.3111380-01	.9732249-03
1760	.1000016+01	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.6562081	-7.2806790	4.1788194	-.5967212-06	.2677095-01	.9891830-03
1770	.1000113+01	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.6446550	-7.5530077	3.8950474	-.5967196-06	.1555696-01	.1032811-02
1780	.1000196+01	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.6407144	-7.7955525	3.6487002	-.5967189-06	.1039985-01	.1053533-02
1790	.1000265+01	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.6392917	-8.0012180	3.4417336	-.5967185-06	.7494223-02	.1064017-02
1800	.1000326+01	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.6386954	-8.1826089	3.2598629	-.5967183-06	.5656348-02	.1069891-02
1810	.1000381+01	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.6384205	-8.3442731	3.0980497	-.5967181-06	.4394031-02	.1073477-02
1820	.1000429+01	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.6382844	-8.4891541	2.9531747	-.5967181-06	.3499306-02	.1075806-02
1830	.1000476+01	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.6382083	-8.6299585	2.8124752	-.5967180-06	.2816991-02	.1077504-02
1840	.1000519+01	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.6381664	-8.7596957	2.6829156	-.5967180-06	.2316115-02	.1078679-02
1850	.1000557+01	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.6381436	-8.8725848	2.5702504	-.5967180-06	.1947809-02	.1079446-02
1860	.1000590+01	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.6381305	-8.9695674	2.4735224	-.5967179-06	.1677417-02	.1079942-02
1864	.1000600+01	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6996942991	3.6381273	-9.0000000	2.4431835	-.5967179-06	.1601303-02	.1080067-02

Модель 350-0125

N	r/R	$lg\ U$	Q	Γ_1	c^2	∇_{ad}	∇_{rad}	∇	χ_T	χ_ρ	χ_X
1	.0000000+00	15.3581564	.9710716	1.6678240	.5040618+08	.3969039+00	.3282108+00	.3282108+00	.9858537	1.0152225	.3608356
10	.2868195-04	15.3581564	.9710716	1.6678240	.5040618+08	.3969039+00	.3282108+00	.3282108+00	.9858537	1.0152225	.3608356
20	.6738197-04	15.3581564	.9710716	1.6678240	.5040618+08	.3969039+00	.3282108+00	.3282108+00	.9858537	1.0152225	.3608357
30	.1401633-03	15.3581565	.9710717	1.6678240	.5040618+08	.3969039+00	.3282109+00	.3282109+00	.9858538	1.0152225	.3608360
40	.2627129-03	15.3581568	.9710717	1.6678240	.5040620+08	.3969039+00	.3282109+00	.3282109+00	.9858538	1.0152224	.3608372
50	.4516472-03	15.3581575	.9710719	1.6678240	.5040625+08	.3969039+00	.3282112+00	.3282112+00	.9858539	1.0152224	.3608403
60	.7246404-03	15.3581594	.9710722	1.6678240	.5040635+08	.3969040+00	.3282118+00	.3282118+00	.9858540	1.0152222	.3608477
70	.1099445-02	15.3581633	.9710729	1.6678239	.5040658+08	.3969040+00	.3282130+00	.3282130+00	.9858544	1.0152218	.3608635
80	.1593288-02	15.3581710	.9710743	1.6678239	.5040702+08	.3969041+00	.3282154+00	.3282154+00	.9858551	1.0152212	.3608943
90	.2223578-02	15.3581849	.9710767	1.6678238	.5040782+08	.3969043+00	.3282197+00	.3282197+00	.9858564	1.0152199	.3609498
100	.3006678-02	15.3582085	.9710809	1.6678237	.5040918+08	.3969046+00	.3282271+00	.3282271+00	.9858587	1.0152178	.3610444
110	.3958667-02	15.3582466	.9710877	1.6678234	.5041137+08	.3969052+00	.3282390+00	.3282390+00	.9858623	1.0152144	.3611973
120	.5095286-02	15.3583056	.9710983	1.6678231	.5041476+08	.3969060+00	.3282573+00	.3282573+00	.9858678	1.0152091	.3614343
130	.6431999-02	15.3583936	.9711140	1.6678226	.5041982+08	.3969073+00	.3282845+00	.3282845+00	.9858762	1.0152012	.3617882
140	.7984162-02	15.3585205	.9711369	1.6678218	.5042712+08	.3969091+00	.3283234+00	.3283234+00	.9858882	1.0151898	.3623002
150	.9767148-02	15.3586985	.9711690	1.6678208	.5043736+08	.3969116+00	.3283774+00	.3283774+00	.9859052	1.0151737	.3630207
160	.1179685-01	15.3589414	.9712132	1.6678194	.5045134+08	.3969151+00	.3284501+00	.3284501+00	.9859286	1.0151516	.3640097
170	.1409081-01	15.3592654	.9712726	1.6678174	.5046998+08	.3969198+00	.3285451+00	.3285451+00	.9859601	1.0151219	.3653382
180	.1666778-01	15.3596877	.9713510	1.6678150	.5049430+08	.3969260+00	.3286656+00	.3286656+00	.9860016	1.0150827	.3670882
190	.1952524-01	15.3602217	.9714519	1.6678118	.5052506+08	.3969340+00	.3288123+00	.3288123+00	.9860551	1.0150324	.3693323
200	.2260579-01	15.3608653	.9715762	1.6678081	.5056215+08	.3969437+00	.3289804+00	.3289804+00	.9861211	1.0149704	.3720879
210	.2589297-01	15.3616168	.9717257	1.6678036	.5060547+08	.3969552+00	.3291639+00	.3291639+00	.9862006	1.0148961	.3753843
220	.2938940-01	15.3624722	.9719023	1.6677985	.5065482+08	.3969687+00	.3293548+00	.3293548+00	.9862946	1.0148085	.3792561
230	.3309797-01	15.3634210	.9721078	1.6677928	.5070959+08	.3969842+00	.3295420+00	.3295420+00	.9864044	1.0147068	.3837273
240	.3703951-01	15.3644497	.9723447	1.6677863	.5076898+08	.3970018+00	.3297117+00	.3297117+00	.9865312	1.0145900	.3888320
250	.4123434-01	15.3655349	.9726155	1.6677793	.5083166+08	.3970214+00	.3298462+00	.3298462+00	.9866768	1.0144571	.3945915
260	.4571116-01	15.3666440	.9729232	1.6677718	.5089570+08	.3970430+00	.3299239+00	.3299239+00	.9868428	1.0143070	.4010202
270	.5051605-01	15.3677330	.9732719	1.6677642	.5095854+08	.3970669+00	.3299183+00	.3299183+00	.9870319	1.0141379	.4081398
280	.5572219-01	15.3687434	.9736682	1.6677570	.5101674+08	.3970930+00	.3297961+00	.3297961+00	.9872482	1.0139472	.4159536
290	.6143267-01	15.3695917	.9741211	1.6677505	.5106534+08	.3971216+00	.3295154+00	.3295154+00	.9874971	1.0137314	.4244561
300	.6781555-01	15.3701521	.9746457	1.6677451	.5109688+08	.3971529+00	.3290161+00	.3290161+00	.9877878	1.0134840	.4337288
310	.7521725-01	15.3702110	.9752735	1.6677414	.5109870+08	.3971877+00	.3281930+00	.3281930+00	.9881391	1.0131918	.4441316
320	.8506516-01	15.3691917	.9761364	1.6677402	.5103658+08	.3972306+00	.3266816+00	.3266816+00	.9886277	1.0127966	.4575360
330	.9446384-01	15.3669735	.9769864	1.6677447	.5090439+08	.3972681+00	.3247362+00	.3247362+00	.9891153	1.0124145	.4697468
340	.1038197+00	15.3635135	.9778586	1.6677589	.5070028+08	.3973030+00	.3222287+00	.3222287+00	.9896221	1.0120298	.4806106
350	.1132999+00	15.3587404	.9787710	1.6677766	.5042059+08	.3973337+00	.3190247+00	.3190247+00	.9901585	1.0116344	.4901985
360	.1263277+00	15.3501947	.9800793	1.6677884	.4992329+08	.3973618+00	.3134212+00	.3134212+00	.9909375	1.0110789	.5015903
370	.1412130+00	15.3378439	.9816669	1.6678088	.4921391+08	.3973850+00	.3054666+00	.3054666+00	.9918945	1.0104186	.5123961
380	.1574961+00	15.3216356	.9835325	1.6678228	.4829790+08	.3973972+00	.2953620+00	.2953620+00	.9930287	1.0096552	.5216202
390	.1758426+00	15.3007161	.9857989	1.6678258	.4713990+08	.3973975+00	.2829327+00	.2829327+00	.9944135	1.0087386	.5292858
400	.1967625+00	15.2744687	.9885679	1.6678253	.4572530+08	.3973909+00	.2682313+00	.2682313+00	.9961074	1.0076267	.5345108
410	.2246454+00	15.2373751	.9924449	1.6677827	.4379465+08	.3973698+00	.2492960+00	.2492960+00	.9984695	1.0060705	.5383764
420	.2641196+00	15.1841021	.9978579	1.6676362	.4115620+08	.3973310+00	.2268750+00	.2268750+00	1.0017336	1.0038839	.5410017
430	.3048932+00	15.1307774	1.0027321	1.6673883	.3866528+08	.3972755+00	.2106061+00	.2106061+00	1.0046397	1.0019024	.5408122
440	.3435712+00	15.0826827	1.0063773	1.6671108	.3654207+08	.3972145+00	.2004700+00	.2004700+00	1.0067923	1.0004124	.5399135
450	.3663235+00	15.0555798	1.0080946	1.6669067	.3539436+08	.3971715+00	.1961691+00	.1961691+00	1.0077922	.9997000	.5401692
460	.3875005+00	15.0311216	1.0094579	1.6666832	.3438806+08	.3971337+00	.1930455+00	.1930455+00	1.0085666	.9991170	.5402143
470	.4083094+00	15.0077637	1.0106099	1.6664024	.3345212+08	.3971001+00	.1907830+00	.1907830+00	1.0091885	.9985935	.5402469

480	.4287075+00	14.9854454	1.0115634	1.6660743	.3258053+08	.3970688+00	.1893327+00	.1893327+00	1.0096716	.9981299	.5396164
490	.4485326+00	14.9642346	1.0123059	1.6657415	.3177269+08	.3970292+00	.1885531+00	.1885531+00	1.0100351	.9977568	.5391849
500	.4676090+00	14.9442146	1.0128421	1.6654590	.3102849+08	.3969707+00	.1883052+00	.1883052+00	1.0103126	.9975026	.5390941
510	.4856806+00	14.9255532	1.0132141	1.6652530	.3035051+08	.3968924+00	.1885309+00	.1885309+00	1.0105399	.9973607	.5387411
520	.5023586+00	14.9085457	1.0134820	1.6651170	.2974547+08	.3968042+00	.1892326+00	.1892326+00	1.0107405	.9972950	.5383339
530	.5168473+00	14.8938939	1.0136907	1.6650295	.2923372+08	.3967205+00	.1903645+00	.1903645+00	1.0109189	.9972656	.5381542
540	.5295304+00	14.8811220	1.0138752	1.6649609	.2879446+08	.3966443+00	.1918317+00	.1918317+00	1.0110821	.9972451	.5382270
550	.5436337+00	14.8669314	1.0140948	1.6648916	.2831395+08	.3965625+00	.1939821+00	.1939821+00	1.0112716	.9972160	.5384794
560	.5608497+00	14.8495615	1.0143890	1.6648015	.2773624+08	.3964695+00	.1972880+00	.1972880+00	1.0115098	.9971616	.5385266
570	.5798221+00	14.8302751	1.0147445	1.6646769	.2710780+08	.3963748+00	.2017989+00	.2017989+00	1.0117736	.9970723	.5384730
580	.5997522+00	14.8097181	1.0151417	1.6645215	.2645301+08	.3962867+00	.2078007+00	.2078007+00	1.0120445	.9969490	.5385193
590	.6199269+00	14.7884058	1.0155456	1.6643351	.2579006+08	.3962035+00	.2158558+00	.2158558+00	1.0123029	.9968070	.5388668
600	.6399763+00	14.7664192	1.0159246	1.6641540	.2512354+08	.3961350+00	.2268413+00	.2268413+00	1.0125335	.9966620	.5403603
610	.6595301+00	14.7437725	1.0162691	1.6639943	.2445521+08	.3960810+00	.2419662+00	.2419662+00	1.0127362	.9965237	.5407278
620	.6780120+00	14.7206546	1.0165693	1.6638516	.2379137+08	.3960372+00	.2634351+00	.2634351+00	1.0129083	.9963986	.5407555
630	.6948780+00	14.6971666	1.0168282	1.6637543	.2313600+08	.3960135+00	.2952243+00	.2952243+00	1.0130516	.9962858	.5409447
640	.7160311+00	14.6614416	1.0171749	1.6636904	.2217486+08	.3960039+00	.3764881+00	.3764881+00	1.0132449	.9961364	.5411187
650	.7446473+00	14.6004662	1.0178789	1.6637513	.2062540+08	.3960413+00	.6291428+00	.3960415+00	1.0136485	.9958438	.5416929
660	.7733516+00	14.5344195	1.0188197	1.6639062	.1906155+08	.3961584+00	.1055850+01	.3961587+00	1.0141451	.9954118	.5422331
670	.7990542+00	14.4701247	1.0198231	1.6639835	.1764413+08	.3962058+00	.1692320+01	.3962062+00	1.0147217	.9949978	.5428436
680	.8232392+00	14.4038757	1.0207972	1.6641388	.1628472+08	.3961312+00	.2708560+01	.3961317+00	1.0154347	.9947468	.5435445
690	.8424508+00	14.3461649	1.0215899	1.6646384	.1517869+08	.3960261+00	.4205998+01	.3960269+00	1.0161966	.9947207	.5441760
700	.8594153+00	14.2904762	1.0225443	1.6653181	.1417441+08	.3958239+00	.4956593+01	.3958249+00	1.0172208	.9947939	.5448717
710	.8749032+00	14.2347638	1.0239604	1.6658346	.1322574+08	.3954046+00	.5549443+01	.3954060+00	1.0186853	.9948483	.5454478
720	.8881106+00	14.1826879	1.0258049	1.6661568	.1238650+08	.3948578+00	.8128327+01	.3948595+00	1.0204671	.9947965	.5459050
730	.9003302+00	14.1298320	1.0281323	1.6669089	.1158036+08	.3944286+00	.1238241+02	.3944309+00	1.0225719	.9945918	.5463157
740	.9115851+00	14.0762175	1.0311488	1.6680027	.1080554+08	.3940730+00	.1963299+02	.3940758+00	1.0251341	.9941670	.5467524
750	.9213754+00	14.0247986	1.0349653	1.6686119	.1009752+08	.3934840+00	.3220811+02	.3934877+00	1.0282377	.9934998	.5472464
760	.9299710+00	13.9750750	1.0396353	1.6687081	.9443778+07	.3926497+00	.5456811+02	.3926545+00	1.0319182	.9925771	.5479291
770	.9376423+00	13.9262131	1.0452628	1.6683687	.8829436+07	.3915871+00	.9353756+02	.3915933+00	1.0362481	.9913757	.5489656
780	.9443962+00	13.8788603	1.0518530	1.6675560	.8258990+07	.3902812+00	.1598646+03	.3902892+00	1.0412340	.9899045	.5503523
790	.9500853+00	13.8351037	1.0592275	1.6659856	.7751821+07	.3886323+00	.2751144+03	.3886423+00	1.0467757	.9882445	.5521620
800	.9551531+00	13.7924751	1.0680166	1.6629995	.7274210+07	.3862864+00	.4927109+03	.3862990+00	1.0533920	.9863067	.5545920
810	.9595735+00	13.7518552	1.0783319	1.6580113	.6832992+07	.3829976+00	.8671831+03	.3830134+00	1.0612138	.9841254	.5577595
820	.9634585+00	13.7129187	1.0904675	1.6502508	.6421847+07	.3784314+00	.1509343+04	.3784511+00	1.0705177	.9817053	.5619105
830	.9668758+00	13.6755926	1.1045022	1.6389672	.6038449+07	.3723042+00	.2654510+04	.3723284+00	1.0814128	.9790952	.5673254
840	.9699506+00	13.6389747	1.1204500	1.6233607	.5673364+07	.3643493+00	.4544430+04	.3643790+00	1.0939317	.9763325	.5744845
850	.9727492+00	13.6025326	1.1372350	1.6037593	.5324231+07	.3548952+00	.7668374+04	.3549316+00	1.1071922	.9735826	.5838983
860	.9753565+00	13.5653096	1.1523759	1.5822700	.4988073+07	.3450989+00	.1246330+05	.3451439+00	1.1191515	.9711688	.5959518
870	.9777752+00	13.5273539	1.1616098	1.5640716	.4673311+07	.3373642+00	.1813881+05	.3374209+00	1.1264177	.9697040	.6104642
880	.9800111+00	13.4888888	1.1618139	1.5557312	.4386504+07	.3343592+00	.2670145+05	.3344325+00	1.1266099	.9696991	.6263799
890	.9820554+00	13.4505972	1.1550970	1.5620526	.4129669+07	.3374465+00	.3703917+05	.3375437+00	1.1214897	.9709051	.6414318
900	.9837511+00	13.4164562	1.1508471	1.5777980	.3912719+07	.3432770+00	.4983578+05	.3434042+00	1.1185718	.9719552	.6522261
910	.9852097+00	13.3852071	1.1567298	1.5913678	.3708726+07	.3463606+00	.6347443+05	.3465234+00	1.1240908	.9717834	.6590619
920	.9864259+00	13.3575380	1.1749582	1.5929611	.3514556+07	.3431049+00	.8588982+05	.3433050+00	1.1397451	.9700303	.6629209
930	.9875125+00	13.3311940	1.2059573	1.5804685	.3318070+07	.3331696+00	.1181073+06	.3334095+00	1.1657257	.9666393	.6654610
940	.9884953+00	13.3056499	1.2490367	1.5557498	.3123019+07	.3178927+00	.1607972+06	.3181745+00	1.2011857	.9616897	.6678343
950	.9893956+00	13.2804044	1.3030844	1.5226038	.2933821+07	.2992588+00	.2082943+06	.2995853+00	1.2449108	.9553570	.6708248
960	.9902249+00	13.2552107	1.3647400	1.4859490	.2755834+07	.2797375+00	.2501237+06	.2801136+00	1.2939119	.9481014	.6748623
970	.9909933+00	13.2298924	1.4295835	1.4502247	.2592395+07	.2613097+00	.2741986+06	.2617443+00	1.3447153	.9406343	.6800274
980	.9917052+00	13.2044521	1.4934232	1.4189516	.2445573+07	.2451077+00	.2692498+06	.2456140+00	1.3946861	.9338854	.6860486
990	.9923579+00	13.1792602	1.5536284	1.3943354	.2316513+07	.2315471+00	.2406746+06	.2321419+00	1.4426515	.9285692	.6923214

1000	.9929538+00	13.1545142	1.6117720	1.3755305	.2202622+07	.2200182+00	.2042398+06	.2207205+00	1.4901582	.9245465	.6979129
1010	.9934980+00	13.1302964	1.6703837	1.3600660	.2100131+07	.2097474+00	.1653637+06	.2105773+00	1.5386492	.9211352	.7015326
1020	.9939982+00	13.1065016	1.7318166	1.3453709	.2005507+07	.2000451+00	.1288730+06	.2010245+00	1.5892149	.9176578	.7025398
1030	.9944626+00	13.0828812	1.7970540	1.3297716	.1916345+07	.1904661+00	.9894503+05	.1916200+00	1.6422150	.9138373	.7008961
1040	.9948964+00	13.0592362	1.8643653	1.3132914	.1832231+07	.1810621+00	.7430859+05	.1824222+00	1.6964020	.9099086	.6972761
1050	.9953027+00	13.0354938	1.9315371	1.2971807	.1753775+07	.1720685+00	.5405272+05	.1736758+00	1.7507554	.9064053	.6926607
1060	.9956828+00	13.0116742	1.9966491	1.2827490	.1681518+07	.1637189+00	.3897186+05	.1656256+00	1.8045300	.9037792	.6879032
1070	.9960424+00	12.9874761	2.0580533	1.2700824	.1614253+07	.1560473+00	.2813149+05	.1583250+00	1.8566042	.9021167	.6833031
1080	.9963836+00	12.9627488	2.1130816	1.2584866	.1550873+07	.1490484+00	.2022482+05	.1517943+00	1.9044380	.9012610	.6789022
1090	.9966983+00	12.9381492	2.1583799	1.2478303	.1492527+07	.1428876+00	.1446779+05	.1462116+00	1.9448426	.9010659	.6748553
1100	.9969955+00	12.9130583	2.1946761	1.2380950	.1437577+07	.1373819+00	.1010001+05	.1414391+00	1.9786096	.9015497	.6712007
1110	.9972763+00	12.8873471	2.2211993	1.2295676	.1385775+07	.1325069+00	.6839979+04	.1375023+00	2.0053832	.9028380	.6680532
1120	.9975423+00	12.8607622	2.2367153	1.2220092	.1336428+07	.1281880+00	.4592844+04	.1343982+00	2.0240952	.9049409	.6654300
1130	.9977953+00	12.8329538	2.2391338	1.2150783	.1288836+07	.1243733+00	.3083666+04	.1321837+00	2.0328399	.9078689	.6633224
1140	.9980367+00	12.8034705	2.2266413	1.2088120	.1242510+07	.1210715+00	.2018815+04	.1310319+00	2.0300489	.9117090	.6617431
1150	.9982684+00	12.7716164	2.1971230	1.2032781	.1196759+07	.1183101+00	.1249976+04	.1312393+00	2.0138525	.9165861	.6607744
1160	.9984898+00	12.7367530	2.1470820	1.1984895	.1151196+07	.1161850+00	.7434312+03	.1333119+00	1.9809910	.9226434	.6603934
1170	.9986914+00	12.6996982	2.0753062	1.1947688	.1107322+07	.1149481+00	.4457268+03	.1378968+00	1.9295577	.9297701	.6607265
1180	.9988674+00	12.6614306	1.9834977	1.1923874	.1066285+07	.1148310+00	.2700699+03	.1456687+00	1.8599580	.9377162	.6617563
1190	.9990198+00	12.6219377	1.8737511	1.1917800	.1027883+07	.1161620+00	.1623999+03	.1577752+00	1.7731436	.9463069	.6633537
1200	.9991502+00	12.5814637	1.7494988	1.1935740	.9920237+06	.1194413+00	.9673066+02	.1759174+00	1.6713110	.9553084	.6654529
1210	.9992603+00	12.5405178	1.6153523	1.1986615	.9587020+06	.1254242+00	.5727095+02	.2026655+00	1.5579147	.9644427	.6678943
1220	.9993518+00	12.4999888	1.4777281	1.2087702	.9282146+06	.1354276+00	.3362121+02	.2421821+00	1.4383010	.9733191	.6705042
1230	.9994273+00	12.4609032	1.3443968	1.2273513	.9010528+06	.1518152+00	.1934141+02	.3017462+00	1.3195076	.9814867	.6731030
1240	.9994897+00	12.4239726	1.2223341	1.2614893	.8778487+06	.1790382+00	.1060414+02	.3958527+00	1.2083674	.9885738	.6754641
1250	.9995389+00	12.3917697	1.1247100	1.3205807	.8607765+06	.2212789+00	.5547508+01	.5421191+00	1.1178718	.9939200	.6772829
1260	.9995716+00	12.3688882	1.0659309	1.3979145	.8515538+06	.2699289+00	.3072252+01	.7212296+00	1.0626612	.9969325	.6783243
1270	.9995926+00	12.3537292	1.0358155	1.4729124	.8453893+06	.3115427+00	.1876484+01	.8776694+00	1.0341321	.9983748	.6788066
1280	.9996113+00	12.3405745	1.0177780	1.5466289	.8357449+06	.3480708+00	.1106196+01	.9171702+00	1.0169377	.9991744	.6790481
1290	.9996319+00	12.3294905	1.0090133	1.6007161	.8201622+06	.3724120+00	.6352879+00	.6330349+00	1.0085201	.9995111	.6791067
1300	.9996467+00	12.3243395	1.0069346	1.6186356	.8095440+06	.3799972+00	.4651467+00	.4651296+00	1.0064952	.9995636	.6790573
1310	.9996525+00	12.3226226	1.0064401	1.6237089	.8056193+06	.3820946+00	.4162951+00	.4162945+00	1.0060083	.9995709	.6790329
1320	.9996585+00	12.3209629	1.0060342	1.6282775	.8016792+06	.3839630+00	.3727338+00	.3727338+00	1.0056060	.9995743	.6790067
1330	.9996646+00	12.3194456	1.0057295	1.6321092	.7979388+06	.3855133+00	.3358496+00	.3358496+00	1.0053010	.9995740	.6789808
1340	.9996713+00	12.3179324	1.0054937	1.6355439	.7940640+06	.3868872+00	.3018399+00	.3018399+00	1.0050615	.9995701	.6789526
1350	.9996782+00	12.3164885	1.0053366	1.6384043	.7902195+06	.3880166+00	.2719220+00	.2719220+00	1.0048972	.9995629	.6789226
1360	.9996854+00	12.3151113	1.0052524	1.6406999	.7864063+06	.3889088+00	.2456214+00	.2456214+00	1.0048028	.9995527	.6788903
1370	.9996928+00	12.3137979	1.0052340	1.6424717	.7826336+06	.3895827+00	.2225081+00	.2225081+00	1.0047715	.9995399	.6788555
1380	.9997004+00	12.3125454	1.0052731	1.6437881	.7789177+06	.3900677+00	.2021944+00	.2021944+00	1.0047954	.9995248	.6788193
1390	.9997082+00	12.3113511	1.0053618	1.6447145	.7752742+06	.3903910+00	.1843330+00	.1843330+00	1.0048670	.9995078	.6787831
1400	.9997162+00	12.3102132	1.0054924	1.6453126	.7717181+06	.3905786+00	.1686142+00	.1686142+00	1.0049789	.9994893	.6787482
1410	.9997243+00	12.3091299	1.0056571	1.6456406	.7682632+06	.3906545+00	.1547627+00	.1547627+00	1.0051238	.9994697	.6787158
1420	.9997325+00	12.3081000	1.0058479	1.6457538	.7649219+06	.3906422+00	.1425291+00	.1425291+00	1.0052940	.9994494	.6786864
1430	.9997407+00	12.3071224	1.0060521	1.6457108	.7617067+06	.3905672+00	.1316348+00	.1316348+00	1.0054779	.9994292	.6786599
1440	.9997490+00	12.3061961	1.0062569	1.6455670	.7586272+06	.3904541+00	.1218275+00	.1218275+00	1.0056631	.9994099	.6786363
1450	.9997573+00	12.3053195	1.0064520	1.6453675	.7556889+06	.3903230+00	.1129168+00	.1129168+00	1.0058401	.9993920	.6786150
1460	.9997655+00	12.3044897	1.0066302	1.6451479	.7528920+06	.3901894+00	.1047594+00	.1047594+00	1.0060020	.9993759	.6785961
1470	.9997737+00	12.3037033	1.0067868	1.6449345	.7502317+06	.3900644+00	.9724814-01	.9724814-01	1.0061443	.9993618	.6785794
1480	.9997819+00	12.3029556	1.0069197	1.6447449	.7476983+06	.3899553+00	.9030271-01	.9030271-01	1.0062648	.9993497	.6785652
1490	.9997900+00	12.3022415	1.0070283	1.6445894	.7452779+06	.3898664+00	.8386273-01	.8386273-01	1.0063631	.9993395	.6785540
1500	.9997981+00	12.3015554	1.0071150	1.6444676	.7429520+06	.3897965+00	.7788114-01	.7788114-01	1.0064412	.9993310	.6785457
1510	.9998061+00	12.3008912	1.0071897	1.6443535	.7406952+06	.3897332+00	.7231956-01	.7231956-01	1.0065082	.9993234	.6785392

1520	.9998140+00	12.3002429	1.0072628	1.6442170	.7384812+06	.3896620+00	.6714505-01	.6714505-01	1.0065740	.9993162	.6785333
1530	.9998219+00	12.2996047	1.0073437	1.6440301	.7362857+06	.3895696+00	.6232785-01	.6232785-01	1.0066473	.9993086	.6785264
1540	.9998297+00	12.2989714	1.0074412	1.6437661	.7340865+06	.3894433+00	.5784003-01	.5784003-01	1.0067362	.9993002	.6785172
1550	.9998374+00	12.2983382	1.0075633	1.6433994	.7318648+06	.3892713+00	.5365479-01	.5365479-01	1.0068482	.9992902	.6785050
1560	.9998451+00	12.2977017	1.0077177	1.6429044	.7296051+06	.3890415+00	.4974632-01	.4974632-01	1.0069904	.9992783	.6784898
1570	.9998528+00	12.2970595	1.0079116	1.6422562	.7272960+06	.3887426+00	.4608994-01	.4608994-01	1.0071698	.9992640	.6784717
1580	.9998604+00	12.2964102	1.0081517	1.6414314	.7249297+06	.3883636+00	.4266236-01	.4266236-01	1.0073924	.9992467	.6784519
1590	.9998680+00	12.2957538	1.0084438	1.6404091	.7225024+06	.3878949+00	.3944166-01	.3944166-01	1.0076636	.9992263	.6784310
1600	.9998755+00	12.2950918	1.0087868	1.6391928	.7200189+06	.3873381+00	.3641142-01	.3641142-01	1.0079825	.9992027	.6784100
1610	.9998831+00	12.2944266	1.0091665	1.6378318	.7174965+06	.3867157+00	.3356377-01	.3356377-01	1.0083358	.9991768	.6783894
1620	.9998906+00	12.2937617	1.0095662	1.6363852	.7149565+06	.3860549+00	.3089239-01	.3089239-01	1.0087077	.9991497	.6783689
1630	.9998982+00	12.2931006	1.0099682	1.6349147	.7124220+06	.3853841+00	.2839140-01	.2839140-01	1.0090819	.9991224	.6783474
1640	.9999058+00	12.2924471	1.0103552	1.6334821	.7099166+06	.3847317+00	.2605516-01	.2605516-01	1.0094418	.9990960	.6783231
1650	.9999134+00	12.2918048	1.0107100	1.6321470	.7074634+06	.3841254+00	.2387805-01	.2387805-01	1.0097717	.9990716	.6782957
1660	.9999211+00	12.2911774	1.0110173	1.6309639	.7050842+06	.3835902+00	.2185430-01	.2185430-01	1.0100571	.9990503	.6782671
1670	.9999288+00	12.2905681	1.0112641	1.6299799	.7027984+06	.3831479+00	.1997785-01	.1997785-01	1.0102859	.9990327	.6782416
1680	.9999366+00	12.2899798	1.0114399	1.6292326	.7006225+06	.3828160+00	.1824234-01	.1824234-01	1.0104484	.9990196	.6782250
1690	.9999445+00	12.2894149	1.0115393	1.6287441	.6985684+06	.3826046+00	.1664129-01	.1664129-01	1.0105393	.9990114	.6782211
1700	.9999524+00	12.2888745	1.0115744	1.6284725	.6966328+06	.3824941+00	.1516812-01	.1516812-01	1.0105703	.9990073	.6782269
1710	.9999604+00	12.2883589	1.0115641	1.6283527	.6948063+06	.3824541+00	.1381577-01	.1381577-01	1.0105592	.9990065	.6782364
1720	.9999685+00	12.2878687	1.0115231	1.6283331	.6930818+06	.3824606+00	.1257682-01	.1257682-01	1.0105200	.9990083	.6782433
1730	.9999766+00	12.2874039	1.0114622	1.6283760	.6914538+06	.3824959+00	.1144369-01	.1144369-01	1.0104629	.9990120	.6782462
1740	.9999848+00	12.2869649	1.0113890	1.6284557	.6899186+06	.3825481+00	.1040873-01	.1040873-01	1.0103952	.9990173	.6782491
1750	.9999931+00	12.2865515	1.0113081	1.6285571	.6884736+06	.3826100+00	.9464406-02	.9464406-02	1.0103209	.9990238	.6782572
1760	.1000016+01	12.2855595	1.0110611	1.6289116	.6850116+06	.3828134+00	.7310008-02	.7310008-02	1.0100968	.9990463	.6783158
1770	.1000113+01	12.2831568	1.0091663	1.6337960	.6770589+06	.3851933+00	.2458211-02	.2458211-02	1.0083641	.9992050	.6785504
1780	.1000196+01	12.2824815	1.0068498	1.6420431	.6758006+06	.3889965+00	.9663555-03	.9663555-03	1.0061872	.9993420	.6787526
1790	.1000265+01	12.2823162	1.0054794	1.6482944	.6760723+06	.3917988+00	.4380870-03	.4380870-03	1.0048430	.9993671	.6788439
1800	.1000326+01	12.2823057	1.0049521	1.6524747	.6765553+06	.3936074+00	.2187181-03	.2187181-03	1.0042395	.9992910	.6788219
1810	.1000381+01	12.2823368	1.0050595	1.6552352	.6770040+06	.3947324+00	.1173540-03	.1173540-03	1.0041825	.9991274	.6787246
1820	.1000429+01	12.2823990	1.0056664	1.6570091	.6773714+06	.3953818+00	.6703259-04	.6703259-04	1.0045422	.9988821	.6785470
1830	.1000476+01	12.2824822	1.0068072	1.6581483	.6776860+06	.3956992+00	.3905662-04	.3905662-04	1.0053241	.9985270	.6783014
1840	.1000519+01	12.2825855	1.0084586	1.6586623	.6779297+06	.3956971+00	.2383840-04	.2383840-04	1.0065064	.9980642	.6779903
1850	.1000557+01	12.2826993	1.0104878	1.6586593	.6781038+06	.3954383+00	.1546997-04	.1546997-04	1.0079859	.9975241	.6776128
1860	.1000590+01	12.2828140	1.0127867	1.6582907	.6782273+06	.3950000+00	.1066372-04	.1066372-04	1.0096756	.9969282	.6772080
1864	.1000600+01	12.2828566	1.0136330	1.6580958	.6782605+06	.3948156+00	.9493250-05	.9493250-05	1.0102994	.9967112	.6770608

Модель 350-0114

N	r/R	μ	M_r/M	L_r/L	X	lg T	lg ρ	lg P	ε	κ	N^2
1	.0000000+00	.0000000+00	.0000000+00	.0000000+00	.3321866204	7.1957583	2.1826048	17.3648643	.1677104+02	.1292583+01	.0000000+00
10	.2795059-04	.1772943-07	.2360708-11	.2047534-10	.3321866464	7.1957583	2.1826047	17.3648643	.1677104+02	.1292583+01	.2682968-11
20	.6489040-04	.9555948-07	.2954001-10	.2562121-09	.3321867609	7.1957583	2.1826046	17.3648642	.1677103+02	.1292583+01	.1446086-10
30	.1296018-03	.3811842-06	.2353436-09	.2041226-08	.3321871811	7.1957581	2.1826042	17.3648638	.1677102+02	.1292584+01	.5768389-10
40	.2396840-03	.1303737-05	.1488625-08	.1291140-07	.3321885382	7.1957577	2.1826027	17.3648626	.1677097+02	.1292585+01	.1972907-09
50	.4092557-03	.3801019-05	.7410545-08	.6427412-07	.3321922117	7.1957567	2.1825989	17.3648594	.1677084+02	.1292589+01	.5751864-09
60	.6528523-03	.9672456-05	.3008189-07	.2609075-06	.3322008484	7.1957542	2.1825898	17.3648518	.1677054+02	.1292598+01	.1463613-08
70	.9857713-03	.2205218-04	.1035565-06	.8981500-06	.3322190583	7.1957490	2.1825706	17.3648357	.1676991+02	.1292616+01	.3336576-08
80	.1422819-02	.4593925-04	.3113693-06	.2700402-05	.3322541931	7.1957389	2.1825336	17.3648048	.1676870+02	.1292651+01	.6949539-08
90	.1978623-02	.8883498-04	.8372902-06	.7260971-05	.3323172814	7.1957207	2.1824671	17.3647492	.1676651+02	.1292715+01	.1343437-07
100	.2667194-02	.1614068-03	.2050609-05	.1778051-04	.3324239989	7.1956900	2.1823547	17.3646553	.1676281+02	.1292822+01	.2439610-07
110	.3502162-02	.2782357-03	.4641083-05	.4023352-04	.3325957524	7.1956406	2.1821738	17.3645040	.1675685+02	.1292995+01	.4201779-07
120	.4496774-02	.4585966-03	.9820787-05	.8510830-04	.3328607992	7.1955642	2.1818945	17.3642704	.1674765+02	.1293262+01	.6916201-07
130	.5663540-02	.7271739-03	.1960909-04	.1698517-03	.3332552422	7.1954505	2.1814788	17.3639225	.1673394+02	.1293659+01	.1094476-06
140	.7012864-02	.1114329-02	.3719805-04	.3219772-03	.3338233261	7.1952867	2.1808799	17.3634211	.1671416+02	.1294232+01	.1672358-06
150	.8539413-02	.1650998-02	.6708411-04	.5800926-03	.3346098035	7.1950595	2.1800505	17.3627259	.1668671+02	.1295026+01	.2467899-06
160	.1023845-01	.2370903-02	.1154438-03	.9969515-03	.3356630011	7.1947546	2.1789392	17.3617934	.1664981+02	.1296092+01	.3525080-06
170	.1210471-01	.3309587-02	.1903972-03	.1641393-02	.3370331419	7.1943570	2.1774924	17.3605773	.1660160+02	.1297482+01	.4886504-06
180	.1413054-01	.4502415-02	.3021122-03	.2598733-02	.3387691391	7.1938515	2.1756576	17.3590318	.1654017+02	.1299250+01	.6589047-06
190	.1630795-01	.5984294-02	.4629344-03	.3971148-02	.3409178362	7.1932233	2.1733837	17.3571114	.1646362+02	.1301447+01	.8661965-06
200	.1862939-01	.7789327-02	.6874640-03	.5877337-02	.3435231415	7.1924576	2.1706223	17.3547717	.1637006+02	.1304126+01	.1112497-05
210	.2108862-01	.9951076-02	.9926703-03	.8452170-02	.3466259941	7.1915400	2.1673271	17.3519688	.1625759+02	.1307337+01	.1398724-05
220	.2368158-01	.1250343-01	.1398118-02	.1184689-01	.3502651597	7.1904558	2.1634530	17.3486582	.1612430+02	.1311134+01	.1724740-05
230	.2640558-01	.1548025-01	.1926047-02	.1622758-01	.3544761626	7.1891901	2.1589571	17.3447954	.1596830+02	.1315569+01	.2089197-05
240	.2926075-01	.1891735-01	.2601898-02	.2177684-01	.3592935871	7.1877273	2.1537954	17.3403327	.1578763+02	.1320698+01	.2489708-05
250	.3225003-01	.2285366-01	.3454885-02	.2869487-01	.3647518774	7.1860501	2.1479219	17.3352183	.1558025+02	.1326584+01	.2922882-05
260	.3537860-01	.2733152-01	.4518514-02	.3719921-01	.3708848799	7.1841397	2.1412884	17.3293953	.1534409+02	.1333296+01	.3384278-05
270	.3865501-01	.3239935-01	.5831823-02	.4752885-01	.3777284077	7.1819746	2.1338407	17.3227981	.1507693+02	.1340914+01	.3868597-05
280	.4209089-01	.3811266-01	.7440530-02	.5994560-01	.3853201623	7.1795301	2.1255180	17.3153511	.1477644+02	.1349531+01	.4369661-05
290	.4570207-01	.4453744-01	.9399136-02	.7474026-01	.3937023512	7.1767764	2.1162485	17.3069635	.1444008+02	.1359261+01	.4880555-05
300	.4946461-01	.5166609-01	.1174379-01	.9202219-01	.4028130321	7.1737154	2.1060695	17.2976393	.1406953+02	.1370111+01	.5387862-05
310	.5348314-01	.5974185-01	.1460219-01	.1125092+00	.4128963920	7.1702407	2.0946660	17.2870516	.1365395+02	.1382477+01	.5893949-05
320	.5777454-01	.6885973-01	.1806958-01	.1365725+00	.4239827385	7.1663084	2.0819449	17.2750651	.1319100+02	.1396544+01	.6386509-05
330	.6238423-01	.7918164-01	.2228111-01	.1647339+00	.4361594674	7.1618451	2.0677283	17.2614513	.1267584+02	.1412622+01	.6854946-05
340	.6740291-01	.9099113-01	.2744723-01	.1978178+00	.4496165010	7.1567231	2.0516849	17.2458132	.1209891+02	.1431245+01	.7290192-05
350	.7300749-01	.1048191+00	.3393600-01	.2372966+00	.4647481417	7.1507036	2.0331734	17.2274096	.1144100+02	.1453405+01	.7684422-05
360	.7892022-01	.1200625+00	.4160171-01	.2812371+00	.4806710964	7.1440392	2.0130718	17.2069926	.1073821+02	.1478332+01	.8000539-05
370	.8505761-01	.1365127+00	.5043823-01	.3286094+00	.4969922892	7.1368113	1.9916904	17.1847877	.1000636+02	.1505831+01	.8229192-05
380	.9140782-01	.1541184+00	.6050369-01	.3787051+00	.5135002987	7.1290319	1.9691107	17.1608066	.9253725+01	.1535935+01	.8370719-05
390	.9796964-01	.1728455+00	.7185996-01	.4307654+00	.5300056840	7.1207046	1.9453778	17.1350222	.8488099+01	.1568693+01	.8425900-05
400	.1045358+00	.1920417+00	.8415759-01	.4823323+00	.5458326393	7.1121100	1.9212952	17.1082675	.7741171+01	.1603019+01	.8403211-05
410	.1110182+00	.2113616+00	.9717156-01	.5319945+00	.5606810466	7.1033980	1.8972463	17.0809777	.7028796+01	.1638271+01	.8321334-05
420	.1174760+00	.2309002+00	.1109523+00	.5796242+00	.5746311678	7.0945221	1.8730544	17.0529737	.6349216+01	.1674561+01	.8198355-05
430	.1239542+00	.2507263+00	.1255451+00	.6250558+00	.5877285153	7.0854474	1.8485720	17.0241024	.5702235+01	.1712059+01	.8049208-05
440	.1304886+00	.2708898+00	.1409902+00	.6681070+00	.5999967796	7.0761460	1.8236700	16.9942271	.5088633+01	.1751004+01	.7885325-05
450	.1371046+00	.2914133+00	.1573128+00	.7085733+00	.6114401471	7.0666012	1.7982454	16.9632390	.4510081+01	.1791615+01	.7716228-05
460	.1438510+00	.3123930+00	.1746031+00	.7464208+00	.6220997450	7.0567602	1.7720951	16.9309051	.3966247+01	.1834303+01	.7549340-05
470	.1507506+00	.3338429+00	.1928916+00	.7814839+00	.6319694946	7.0466059	1.7451042	16.8970981	.3459019+01	.1879377+01	.7392639-05

480	.1578269+00	.3557752+00	.2122088+00	.8136436+00	.6410476183	7.0361198	1.7171454	16.8616787	.2989886+01	.1927145+01	.7252803-05
490	.1651184+00	.3782418+00	.2326239+00	.8428817+00	.6493523862	7.0252616	1.6880214	16.8244220	.2559106+01	.1977968+01	.7134749-05
500	.1726641+00	.4012859+00	.2542031+00	.8691966+00	.6568991240	7.0139913	1.6575219	16.7850873	.2166876+01	.2032226+01	.7042647-05
510	.1805040+00	.4249411+00	.2770085+00	.8926105+00	.6637028326	7.0022698	1.6254189	16.7434176	.1813205+01	.2090335+01	.6980010-05
520	.1886860+00	.4492477+00	.3011125+00	.9131889+00	.6697844033	6.9900496	1.5914381	16.6991042	.1497585+01	.2152803+01	.6949132-05
530	.1972665+00	.4742481+00	.3265942+00	.9310322+00	.6751690229	6.9772758	1.5552547	16.6517777	.1219094+01	.2220307+01	.6950703-05
540	.2059363+00	.4989309+00	.3524200+00	.9457048+00	.6797078233	6.9644392	1.5181067	16.6031237	.9855528+00	.2290679+01	.6981403-05
550	.2244697+00	.5494666+00	.4072977+00	.9680868+00	.6869399529	6.9373451	1.4366819	16.4966056	.6172702+00	.2449399+01	.7109094-05
560	.2457381+00	.6032427+00	.4685307+00	.9831449+00	.6921931303	6.9070374	1.3399807	16.3708734	.3548906+00	.2647339+01	.7280702-05
570	.2617948+00	.6406048+00	.5127259+00	.9897654+00	.6947086972	6.8848632	1.2648837	16.2741037	.2319526+00	.2809917+01	.7381500-05
580	.2817149+00	.6829648+00	.5644136+00	.9945892+00	.6967092999	6.8582923	1.1696768	16.1526066	.1361810+00	.3022050+01	.7452734-05
590	.3064076+00	.7294133+00	.6229605+00	.9976218+00	.6981225777	6.8267958	1.0495110	16.0010181	.7009743-01	.3383535+01	.7240003-05
600	.3298071+00	.7675988+00	.6725142+00	.9989588+00	.6988413082	6.7977286	.9350769	15.8574543	.3700521-01	.3827763+01	.6804090-05
610	.3525539+00	.7997958+00	.7152678+00	.9995691+00	.6992248344	6.7699352	.8242022	15.7186773	.1959466-01	.4295869+01	.6337430-05
620	.3747060+00	.8269930+00	.7520604+00	.9998468+00	.6994331047	6.7434024	.7169039	15.5847359	.1032030-01	.4748018+01	.5917761-05
630	.3957576+00	.8494698+00	.7829282+00	.9999695+00	.6995459672	6.7188875	.6156680	15.4589024	.5415516-02	.5171745+01	.5554098-05
640	.4160065+00	.8683512+00	.8091762+00	.1000023+01	.6996095765	6.6960171	.5191568	15.3394661	.2720344-02	.5619937+01	.5193069-05
650	.4359838+00	.8846620+00	.8320819+00	.1000046+01	.6996470029	6.6739789	.4250995	15.2233428	.1170551-02	.6143852+01	.4805085-05
660	.4559600+00	.8989563+00	.8523301+00	.1000053+01	.6996694926	6.6522414	.3324938	15.1089917	.2596437-03	.6738787+01	.4410719-05
670	.4757187+00	.9113641+00	.8700373+00	.1000053+01	.6996829464	6.6309502	.2424003	14.9976133	-.2702519-03	.7337280+01	.4057908-05
680	.4941427+00	.9215755+00	.8847007+00	.1000050+01	.6996907004	6.6113781	.1596248	14.8952777	-.5631990-03	.7858436+01	.3781829-05
690	.5102236+00	.9295397+00	.8961937+00	.1000046+01	.6996950881	6.5946202	.0882393	14.8071498	-.7194041-03	.8298733+01	.3570356-05
700	.5231967+00	.9353849+00	.9046603+00	.1000042+01	.6996975479	6.5813306	.0312288	14.7368621	-.8003284-03	.8682664+01	.3403156-05
710	.5345933+00	.9401297+00	.9115525+00	.1000039+01	.6996991437	6.5697810	-.0183884	14.6757049	-.8477312-03	.9069280+01	.3250135-05
720	.5495110+00	.9458365+00	.9198651+00	.1000036+01	.6997006564	6.5547266	-.0825861	14.5964636	-.8864029-03	.9670788+01	.3036704-05
730	.5671144+00	.9519075+00	.9287356+00	.1000032+01	.6997018552	6.5368395	-.1571095	14.5040594	-.9092588-03	.1051617+02	.2772684-05
740	.5876830+00	.9581990+00	.9379583+00	.1000027+01	.6997027346	6.5155049	-.2424166	14.3974178	-.9173803-03	.1158266+02	.2478593-05
750	.6103631+00	.9642673+00	.9468827+00	.1000023+01	.6997033062	6.4913927	-.3345413	14.2811719	-.9153133-03	.1264204+02	.2214578-05
760	.6303990+00	.9689700+00	.9538179+00	.1000020+01	.6997036034	6.4696959	-.4146091	14.1793966	-.9112023-03	.1354131+02	.2011700-05
770	.6484920+00	.9727520+00	.9594077+00	.1000017+01	.6997037698	6.4494638	-.4857337	14.0880269	-.9093562-03	.1472892+02	.1776700-05
780	.6656037+00	.9759722+00	.9641757+00	.1000015+01	.6997038704	6.4288351	-.5513096	14.0017890	-.9125451-03	.1649887+02	.1453000-05
790	.6838146+00	.9790684+00	.9687674+00	.1000013+01	.6997039384	6.4038960	-.6184453	13.9096272	-.9285332-03	.1874253+02	.1026035-05
800	.6944241+00	.9807343+00	.9712411+00	.1000011+01	.6997039653	6.3874218	-.6561007	13.8554233	-.9453039-03	.2010272+02	.7332945-06
810	.7209568+00	.9845280+00	.9768819+00	.1000009+01	.6997040035	6.3363981	-.7439770	13.7161854	-.1052090-02	.2527967+02	-.1053984-12
820	.7542023+00	.9886358+00	.9830022+00	.1000005+01	.6997040184	6.2622616	-.8564834	13.5289887	-.9260430-03	.3646249+02	-.1789443-11
830	.7799133+00	.9913361+00	.9870324+00	.1000004+01	.6997040212	6.1998051	-.9512345	13.3713281	-.8026276-03	.4752427+02	-.2947310-11
840	.8064638+00	.9936987+00	.9905629+00	.1000002+01	.6997040219	6.1291557	-1.0583903	13.1930100	-.6820995-03	.6056348+02	-.4504201-11
850	.8295874+00	.9954144+00	.9931295+00	.1000001+01	.6997040220	6.0610000	-1.1617707	13.0209677	-.5802554-03	.7227795+02	-.6566229-11
860	.8480288+00	.9965629+00	.9948488+00	.1000001+01	.6997040220	6.0008869	-1.2529527	12.8691816	-.5117735-03	.8653726+02	-.9163456-11
870	.8617680+00	.9972966+00	.9959476+00	.1000001+01	.6997040220	5.9518884	-1.3272797	12.7454186	-.4611396-03	.7942418+02	-.1191347-10
880	.8778411+00	.9980278+00	.9970432+00	.1000000+01	.6997040220	5.8888143	-1.4230096	12.5859636	-.3906596-03	.7584423+02	-.1693196-10
890	.8909219+00	.9985261+00	.9977900+00	.1000000+01	.6997040220	5.8317262	-1.5097573	12.4414412	-.3246157-03	.9360303+02	-.2368769-10
900	.9024788+00	.9988974+00	.9983465+00	.1000000+01	.6997040220	5.7757830	-1.5948370	12.2996343	-.2630863-03	.1170052+03	-.3306300-10
910	.9126828+00	.9991739+00	.9987611+00	.1000000+01	.6997040220	5.7209231	-1.6782931	12.1604630	-.2092984-03	.1490069+03	-.4606358-10
920	.9220237+00	.9993869+00	.9990805+00	.1000000+01	.6997040220	5.6650120	-1.7634107	12.0184445	-.1627404-03	.1997754+03	-.6489393-10
930	.9303888+00	.9995467+00	.9993202+00	.1000000+01	.6997040220	5.6091005	-1.8486730	11.8761651	-.1246688-03	.2771852+03	-.9184906-10
940	.9379018+00	.9996666+00	.9995000+00	.1000000+01	.6997040220	5.5529068	-1.9345822	11.7328154	-.9424846-04	.3909216+03	-.1308496-09
950	.9444264+00	.9997536+00	.9996304+00	.1000000+01	.6997040220	5.4982793	-2.0183757	11.5930336	-.7116305-04	.5498489+03	-.1854293-09
960	.9500956+00	.9998168+00	.9997252+00	.1000000+01	.6997040220	5.4452577	-2.1000669	11.4568591	-.5381144-04	.7938364+03	-.2611343-09
970	.9551723+00	.9998642+00	.9997963+00	.1000000+01	.6997040220	5.3923012	-2.1821911	11.3201497	-.4048272-04	.1196216+04	-.3688833-09
980	.9596244+00	.9998990+00	.9998485+00	.1000000+01	.6997040220	5.3406046	-2.2631509	11.1857031	-.3052404-04	.1790503+04	-.5184058-09
990	.9636165+00	.9999251+00	.9998877+00	.1000000+01	.6997040220	5.2891789	-2.3448629	11.0505331	-.2295593-04	.2705749+04	-.7292608-09

1000	.9671358+00	.9999444+00	.9999166+00	.1000000+01	.6997040220	5.2391146	-2.4260955	10.9169746	-.1732818-04	.4169447+04	-.1019239-08
1010	.9703006+00	.9999588+00	.9999382+00	.1000000+01	.6997040220	5.1897030	-2.5086231	10.7824719	-.1307725-04	.6277739+04	-.1422495-08
1020	.9731877+00	.9999697+00	.9999546+00	.1000000+01	.6997040220	5.1404753	-2.5939628	10.6449914	-.9842833-05	.9421822+04	-.1992224-08
1030	.9759825+00	.9999784+00	.9999676+00	.1000000+01	.6997040220	5.0883888	-2.6882306	10.4952301	-.7269237-05	.1359349+05	-.2870788-08
1040	.9784774+00	.9999846+00	.9999769+00	.1000000+01	.6997040220	5.0372142	-2.7844740	10.3442782	-.5408436-05	.1778189+05	-.4167775-08
1050	.9807255+00	.9999891+00	.9999837+00	.1000000+01	.6997040220	4.9857585	-2.8830513	10.1907157	-.4058929-05	.2320398+05	-.6159637-08
1060	.9825899+00	.9999921+00	.9999882+00	.1000000+01	.6997040220	4.9374310	-2.9748614	10.0473638	-.3155517-05	.2794584+05	-.8978888-08
1070	.9841427+00	.9999942+00	.9999913+00	.1000000+01	.6997040220	4.8917087	-3.0596511	9.9138193	-.2539061-05	.3300553+05	-.1282212-07
1080	.9854816+00	.9999957+00	.9999935+00	.1000000+01	.6997040220	4.8473265	-3.1403934	9.7855401	-.2098238-05	.3709249+05	-.1798210-07
1090	.9866632+00	.9999967+00	.9999951+00	.1000000+01	.6997040220	4.8039790	-3.2194163	9.6596246	-.1773533-05	.4554506+05	-.2478919-07
1100	.9877285+00	.9999976+00	.9999963+00	.1000000+01	.6997040220	4.7616098	-3.2990156	9.5334945	-.1528987-05	.5685537+05	-.3372392-07
1110	.9886934+00	.9999982+00	.9999973+00	.1000000+01	.6997040220	4.7207983	-3.3801461	9.4066970	-.1344428-05	.7063379+05	-.4533163-07
1120	.9895757+00	.9999986+00	.9999979+00	.1000000+01	.6997040220	4.6817522	-3.4639640	9.2782751	-.1204537-05	.8469300+05	-.6044176-07
1130	.9903905+00	.9999990+00	.9999985+00	.1000000+01	.6997040220	4.6444305	-3.5515266	9.1472273	-.1098248-05	.9536110+05	-.8038191-07
1140	.9911460+00	.9999993+00	.9999989+00	.1000000+01	.6997040220	4.6087917	-3.6431699	9.0133475	-.1017927-05	.1001521+06	-.1070404-06
1150	.9918010+00	.9999994+00	.9999992+00	.1000000+01	.6997040220	4.5769884	-3.7321303	8.8861719	-.9612902-06	.9652286+05	-.1402459-06
1160	.9924375+00	.9999996+00	.9999994+00	.1000000+01	.6997040220	4.5451110	-3.8281650	8.7513326	-.9167401-06	.8696409+05	-.1867000-06
1170	.9930246+00	.9999997+00	.9999995+00	.1000000+01	.6997040220	4.5146588	-3.9261999	8.6156775	-.8838290-06	.7565873+05	-.2487969-06
1180	.9935610+00	.9999998+00	.9999997+00	.1000000+01	.6997040220	4.4858195	-4.0247421	8.4809048	-.8598255-06	.6370778+05	-.3303937-06
1190	.9940540+00	.9999998+00	.9999998+00	.1000000+01	.6997040220	4.4583714	-4.1240087	8.3465599	-.8422361-06	.5239855+05	-.4370525-06
1200	.9945130+00	.9999999+00	.9999998+00	.1000000+01	.6997040220	4.4319954	-4.2250825	8.2112266	-.8292215-06	.4302121+05	-.5769688-06
1210	.9949421+00	.9999999+00	.9999999+00	.1000000+01	.6997040220	4.4066191	-4.3283613	8.0745375	-.8195928-06	.3495269+05	-.7606920-06
1220	.9953444+00	.9999999+00	.9999999+00	.1000000+01	.6997040220	4.3822073	-4.4339492	7.9364395	-.8124902-06	.2781919+05	-.1002368-05
1230	.9957205+00	.1000000+01	.9999999+00	.1000000+01	.6997040220	4.3588062	-4.5413070	7.7975579	-.8072889-06	.2221864+05	-.1319860-05
1240	.9960727+00	.1000000+01	.9999999+00	.1000000+01	.6997040220	4.3363339	-4.6502203	7.6579712	-.8034894-06	.1802477+05	-.1738196-05
1250	.9964039+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6997040220	4.3146188	-4.7609038	7.5172410	-.8007116-06	.1474581+05	-.2292861-05
1260	.9967167+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6997040220	4.2935129	-4.8735524	7.3750349	-.7986822-06	.1201573+05	-.3032421-05
1270	.9970121+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6997040220	4.2729279	-4.9880416	7.2314141	-.7972053-06	.9635781+04	-.4022176-05
1280	.9972908+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6997040220	4.2528014	-5.1039957	7.0866733	-.7961360-06	.7563092+04	-.5350405-05
1290	.9975549+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6997040220	4.2329382	-5.2217503	6.9401837	-.7953613-06	.5923182+04	-.7149988-05
1300	.9978063+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6997040220	4.2131366	-5.3416848	6.7912891	-.7948001-06	.4660483+04	-.9616124-05
1310	.9980460+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6997040220	4.1932002	-5.4640002	6.6395127	-.7943950-06	.3592924+04	-.1304013-04
1320	.9982761+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6997040220	4.1727732	-5.5895350	6.4834810	-.7941024-06	.2636956+04	-.1790283-04
1330	.9984962+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6997040220	4.1516084	-5.7178939	6.3232044	-.7938933-06	.1864469+04	-.2493154-04
1340	.9986957+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6997040220	4.1304473	-5.8420792	6.1668563	-.7937516-06	.1320368+04	-.3471479-04
1350	.9988704+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6997040220	4.1096136	-5.9576040	6.0195674	-.7936575-06	.9264314+03	-.4792694-04
1360	.9990219+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6997040220	4.0888438	-6.0633915	5.8822792	-.7935943-06	.6300606+03	-.6566931-04
1370	.9991516+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6997040220	4.0678373	-6.1583688	5.7559330	-.7935513-06	.4128864+03	-.8944169-04
1380	.9992611+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6997040220	4.0462433	-6.2416192	5.6413065	-.7935218-06	.2605016+03	-.1214086-03
1390	.9993522+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6997040220	4.0236058	-6.3125348	5.5388445	-.7935012-06	.1570420+03	-.1650643-03
1400	.9994271+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6997040220	3.9991779	-6.3710386	5.4481546	-.7934867-06	.8892946+02	-.2270237-03
1410	.9994886+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6997040220	3.9716161	-6.4173456	5.3678829	-.7934761-06	.4584446+02	-.3215185-03
1420	.9995448+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6997040220	3.9340037	-6.4542833	5.2879636	-.7934673-06	.1829139+02	-.5089927-03
1430	.9995750+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6997040220	3.9034628	-6.4684371	5.2409384	-.7934629-06	.8703113+01	-.7216096-03
1440	.9995949+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6997040220	3.8763672	-6.4734020	5.2077476	-.7934600-06	.4527967+01	-.9191711-03
1450	.9996131+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6997040220	3.8465990	-6.4755815	5.1751390	-.7934574-06	.2211375+01	-.9254492-03
1460	.9996328+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6997040220	3.8178469	-6.4843239	5.1373182	-.7934546-06	.1100943+01	-.4373470-03
1470	.9996547+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6997040220	3.7958838	-6.5067170	5.0928248	-.7934516-06	.6444427+00	-.3025122-04
1480	.9996978+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6997040220	3.7651437	-6.5691485	4.9995221	-.7934463-06	.3153330+00	.3691617-03
1490	.9997562+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6997040220	3.7374164	-6.6766096	4.8642438	-.7934403-06	.1820655+00	.6013654-03
1500	.9998432+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6997040220	3.7078238	-6.8619386	4.6492674	-.7934339-06	.1010991+00	.7892892-03
1510	.9999345+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6997040220	3.6763752	-7.0721905	4.4074538	-.7934296-06	.4868528-01	.9165241-03

1520	.9999981+00	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6997040220	3.6596331	-7.2334870	4.2294289	-.7934277-06	.3006722-01	.9770006-03
1530	.1000075+01	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6997040220	3.6479895	-7.4434343	4.0079066	-.7934262-06	.1900153-01	.1019025-02
1540	.1000165+01	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6997040220	3.6418035	-7.7038806	3.7414119	-.7934251-06	.1206423-01	.1046983-02
1550	.1000239+01	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6997040220	3.6397091	-7.9224398	3.5208866	-.7934247-06	.8497014-02	.1060570-02
1560	.1000303+01	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6997040220	3.6388781	-8.1122971	3.3303144	-.7934244-06	.6302448-02	.1067883-02
1570	.1000360+01	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6997040220	3.6385056	-8.2819492	3.1604112	-.7934242-06	.4842129-02	.1072222-02
1580	.1000410+01	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6997040220	3.6383264	-8.4338471	3.0084695	-.7934241-06	.3817896-02	.1074982-02
1590	.1000457+01	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6997040220	3.6382326	-8.5738495	2.8685342	-.7934241-06	.3064983-02	.1076876-02
1600	.1000503+01	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6997040220	3.6381785	-8.7112856	2.7312530	-.7934240-06	.2493244-02	.1078270-02
1610	.1000543+01	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6997040220	3.6381498	-8.8303480	2.6123982	-.7934240-06	.2077764-02	.1079170-02
1620	.1000578+01	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6997040220	3.6381336	-8.9335638	2.5094269	-.7934240-06	.1772559-02	.1079765-02
1628	.1000600+01	.1000000+01	.1000000+01	.1000000+01	.6997040220	3.6381261	-9.0000000	2.4431863	-.7934240-06	.1600908-02	.1080054-02

Модель 350-0114.

N	r/R	lg U	Q	Γ_1	c^2	∇_{ad}	∇_{rad}	∇	χ_T	χ_ρ	χ_X
1	.0000000+00	15.3575687	.9705382	1.6678576	.5037433+08	.3969071+00	.3263940+00	.3263940+00	.9855330	1.0154501	.3608584
10	.2795059-04	15.3575687	.9705382	1.6678576	.5037433+08	.3969071+00	.3263940+00	.3263940+00	.9855330	1.0154501	.3608584
20	.6489040-04	15.3575687	.9705382	1.6678576	.5037433+08	.3969071+00	.3263940+00	.3263940+00	.9855330	1.0154501	.3608585
30	.1296018-03	15.3575688	.9705382	1.6678576	.5037433+08	.3969071+00	.3263940+00	.3263940+00	.9855330	1.0154500	.3608588
40	.2396840-03	15.3575690	.9705382	1.6678576	.5037435+08	.3969071+00	.3263941+00	.3263941+00	.9855331	1.0154500	.3608597
50	.4092557-03	15.3575696	.9705383	1.6678576	.5037438+08	.3969071+00	.3263942+00	.3263942+00	.9855331	1.0154500	.3608623
60	.6528523-03	15.3575712	.9705386	1.6678576	.5037447+08	.3969071+00	.3263947+00	.3263947+00	.9855333	1.0154498	.3608683
70	.9857713-03	15.3575743	.9705392	1.6678576	.5037465+08	.3969071+00	.3263957+00	.3263957+00	.9855336	1.0154495	.3608810
80	.1422819-02	15.3575804	.9705403	1.6678575	.5037500+08	.3969072+00	.3263975+00	.3263975+00	.9855342	1.0154490	.3609055
90	.1978623-02	15.3575914	.9705424	1.6678574	.5037563+08	.3969074+00	.3264008+00	.3264008+00	.9855353	1.0154480	.3609495
100	.2667194-02	15.3576100	.9705458	1.6678573	.5037670+08	.3969076+00	.3264064+00	.3264064+00	.9855371	1.0154463	.3610238
110	.3502162-02	15.3576399	.9705513	1.6678571	.5037842+08	.3969081+00	.3264154+00	.3264154+00	.9855400	1.0154435	.3611435
120	.4496774-02	15.3576860	.9705597	1.6678568	.5038106+08	.3969087+00	.3264291+00	.3264291+00	.9855445	1.0154393	.3613280
130	.5663540-02	15.3577543	.9705724	1.6678564	.5038499+08	.3969097+00	.3264495+00	.3264495+00	.9855512	1.0154330	.3616025
140	.7012864-02	15.3578525	.9705905	1.6678558	.5039063+08	.3969111+00	.3264786+00	.3264786+00	.9855608	1.0154239	.3619974
150	.8539413-02	15.3579879	.9706156	1.6678549	.5039841+08	.3969130+00	.3265184+00	.3265184+00	.9855742	1.0154114	.3625432
160	.1023845-01	15.3581681	.9706492	1.6678537	.5040877+08	.3969156+00	.3265708+00	.3265708+00	.9855921	1.0153947	.3632728
170	.1210471-01	15.3584007	.9706929	1.6678522	.5042213+08	.3969189+00	.3266375+00	.3266375+00	.9856153	1.0153729	.3642194
180	.1413054-01	15.3586924	.9707481	1.6678504	.5043891+08	.3969231+00	.3267194+00	.3267194+00	.9856446	1.0153454	.3654149
190	.1630795-01	15.3590489	.9708163	1.6678481	.5045940+08	.3969283+00	.3268171+00	.3268171+00	.9856809	1.0153115	.3668886
200	.1862939-01	15.3594741	.9708988	1.6678453	.5048387+08	.3969345+00	.3269300+00	.3269300+00	.9857249	1.0152705	.3686667
210	.2108862-01	15.3599706	.9709968	1.6678421	.5051244+08	.3969419+00	.3270566+00	.3270566+00	.9857771	1.0152218	.3707722
220	.2368158-01	15.3605390	.9711113	1.6678385	.5054516+08	.3969504+00	.3271944+00	.3271944+00	.9858382	1.0151650	.3732250
230	.2640558-01	15.3611778	.9712434	1.6678343	.5058195+08	.3969602+00	.3273397+00	.3273397+00	.9859088	1.0150996	.3760417
240	.2926075-01	15.3618834	.9713940	1.6678296	.5062260+08	.3969713+00	.3274877+00	.3274877+00	.9859895	1.0150252	.3792362
250	.3225003-01	15.3626499	.9715642	1.6678244	.5066679+08	.3969836+00	.3276323+00	.3276323+00	.9860807	1.0149414	.3828210
260	.3537860-01	15.3634688	.9717547	1.6678187	.5071400+08	.3969972+00	.3277664+00	.3277664+00	.9861831	1.0148478	.3868057
270	.3865501-01	15.3643287	.9719668	1.6678126	.5076359+08	.3970121+00	.3278813+00	.3278813+00	.9862973	1.0147439	.3911990
280	.4209089-01	15.3652148	.9722016	1.6678059	.5081469+08	.3970282+00	.3279673+00	.3279673+00	.9864243	1.0146293	.3960068
290	.4570207-01	15.3661084	.9724607	1.6677990	.5086621+08	.3970456+00	.3280129+00	.3280129+00	.9865648	1.0145034	.4012330
300	.4946461-01	15.3669758	.9727427	1.6677920	.5091618+08	.3970640+00	.3280052+00	.3280052+00	.9867183	1.0143672	.4068162
310	.5348314-01	15.3678054	.9730557	1.6677855	.5096393+08	.3970841+00	.3279292+00	.3279292+00	.9868895	1.0142168	.4128653
320	.5777454-01	15.3685551	.9734017	1.6677794	.5100696+08	.3971057+00	.3277668+00	.3277668+00	.9870796	1.0140517	.4193221
330	.6238423-01	15.3691742	.9737848	1.6677741	.5104229+08	.3971287+00	.3274964+00	.3274964+00	.9872914	1.0138703	.4261743
340	.6740291-01	15.3695976	.9742132	1.6677698	.5106604+08	.3971534+00	.3270884+00	.3270884+00	.9875298	1.0136691	.4334734
350	.7300749-01	15.3697261	.9747036	1.6677666	.5107234+08	.3971802+00	.3264945+00	.3264945+00	.9878046	1.0134410	.4414081
360	.7892022-01	15.3694333	.9752326	1.6677641	.5105376+08	.3972069+00	.3257110+00	.3257110+00	.9881033	1.0131976	.4495849
370	.8505761-01	15.3686342	.9757933	1.6677626	.5100535+08	.3972329+00	.3247150+00	.3247150+00	.9884224	1.0129424	.4578838
380	.9140782-01	15.3672583	.9763849	1.6677634	.5092314+08	.3972582+00	.3234704+00	.3234704+00	.9887619	1.0126764	.4662500
390	.9796964-01	15.3652317	.9770084	1.6677693	.5080309+08	.3972833+00	.3219281+00	.3219281+00	.9891228	1.0123995	.4743420
400	.1045358+00	15.3625835	.9776452	1.6677805	.5064722+08	.3973073+00	.3200977+00	.3200977+00	.9894945	1.0121203	.4817315
410	.1110182+00	15.3593676	.9782872	1.6677924	.5045877+08	.3973286+00	.3179823+00	.3179823+00	.9898722	1.0118421	.4883411
420	.1174760+00	15.3555857	.9789411	1.6678000	.5023792+08	.3973456+00	.3155437+00	.3155437+00	.9902596	1.0115620	.4943488
430	.1239542+00	15.3512326	.9796129	1.6678034	.4998476+08	.3973582+00	.3127619+00	.3127619+00	.9906604	1.0112774	.4999200
440	.1304886+00	15.3462975	.9803083	1.6678078	.4969944+08	.3973689+00	.3096354+00	.3096354+00	.9910779	1.0109859	.5051079
450	.1371046+00	15.3407722	.9810323	1.6678171	.4938227+08	.3973793+00	.3061702+00	.3061702+00	.9915145	1.0106849	.5098922
460	.1438510+00	15.3346288	.9817922	1.6678288	.4903213+08	.3973888+00	.3023645+00	.3023645+00	.9919747	1.0103713	.5142411
470	.1507506+00	15.3278600	.9825930	1.6678359	.4864896+08	.3973949+00	.2982350+00	.2982350+00	.9924612	1.0100430	.5182386

480	.1578269+00	15.3204561	.9834394	1.6678361	.4823290+08	.3973969+00	.2937974+00	.2937974+00	.9929769	1.0096980	.5219569
490	.1651184+00	15.3123866	.9843382	1.6678347	.4778337+08	.3973969+00	.2890485+00	.2890485+00	.9935255	1.0093335	.5253375
500	.1726641+00	15.3036188	.9852956	1.6678364	.4729981+08	.3973969+00	.2839846+00	.2839846+00	.9941107	1.0089467	.5282944
510	.1805040+00	15.2941260	.9863178	1.6678395	.4678175+08	.3973964+00	.2786035+00	.2786035+00	.9947361	1.0085350	.5308130
520	.1886860+00	15.2838775	.9874121	1.6678398	.4622855+08	.3973940+00	.2729013+00	.2729013+00	.9954056	1.0080954	.5329268
530	.1972665+00	15.2728309	.9885856	1.6678358	.4563921+08	.3973897+00	.2668745+00	.2668745+00	.9961231	1.0076245	.5346719
540	.2059363+00	15.2614311	.9897929	1.6678269	.4503851+08	.3973841+00	.2607891+00	.2607891+00	.9968601	1.0071401	.5360147
550	.2244697+00	15.2365942	.9924153	1.6677900	.4375549+08	.3973686+00	.2480564+00	.2480564+00	.9984554	1.0060863	.5384277
560	.2457381+00	15.2079066	.9954166	1.6677155	.4231627+08	.3973470+00	.2342482+00	.2342482+00	1.0002694	1.0048752	.5390820
570	.2617948+00	15.1865187	.9976118	1.6676456	.4127261+08	.3973327+00	.2245200+00	.2245200+00	1.0015865	1.0039842	.5407268
580	.2817149+00	15.1606272	1.0001763	1.6675203	.4004059+08	.3973066+00	.2128377+00	.2128377+00	1.0031159	1.0029391	.5417580
590	.3064076+00	15.1297307	1.0030197	1.6673556	.3861604+08	.3972762+00	.2041617+00	.2041617+00	1.0048003	1.0017752	.5407044
600	.3298071+00	15.1011248	1.0053057	1.6671942	.3734064+08	.3972448+00	.2011844+00	.2011844+00	1.0061483	1.0008381	.5401860
610	.3525539+00	15.0737724	1.0071715	1.6669975	.3615805+08	.3971993+00	.1993402+00	.1993402+00	1.0072433	1.0000712	.5399181
620	.3747060+00	15.0476760	1.0087077	1.6667915	.3506361+08	.3971575+00	.1965996+00	.1965996+00	1.0081321	.9994294	.5401450
630	.3957576+00	15.0236082	1.0099624	1.6665541	.3408214+08	.3971218+00	.1929824+00	.1929824+00	1.0088339	.9988826	.5402697
640	.4160065+00	15.0012021	1.0110019	1.6662595	.3319143+08	.3970896+00	.1902653+00	.1902653+00	1.0093819	.9983976	.5400354
650	.4359838+00	14.9796467	1.0118586	1.6659297	.3235564+08	.3970561+00	.1896641+00	.1896641+00	1.0098086	.9979740	.5393306
660	.4559600+00	14.9584115	1.0125281	1.6656073	.3155261+08	.3970085+00	.1906718+00	.1906718+00	1.0101403	.9976417	.5391110
670	.4757187+00	14.9376339	1.0130137	1.6653491	.3078642+08	.3969389+00	.1914680+00	.1914680+00	1.0104076	.9974274	.5389637
680	.4941427+00	14.9185593	1.0133469	1.6651702	.3009926+08	.3968503+00	.1908051+00	.1908051+00	1.0106321	.9973209	.5385236
690	.5102236+00	14.9022489	1.0135870	1.6650612	.2952367+08	.3967619+00	.1894795+00	.1894795+00	1.0108262	.9972762	.5382062
700	.5231967+00	14.8893321	1.0137726	1.6649852	.2907514+08	.3966845+00	.1887943+00	.1887943+00	1.0109885	.9972537	.5381434
710	.5345933+00	14.8781145	1.0139423	1.6649241	.2869088+08	.3966163+00	.1890831+00	.1890831+00	1.0111373	.9972336	.5382817
720	.5495110+00	14.8635005	1.0141824	1.6648455	.2819758+08	.3965306+00	.1912379+00	.1912379+00	1.0113399	.9971973	.5385193
730	.5671144+00	14.8461423	1.0144932	1.6647415	.2762217+08	.3964362+00	.1963108+00	.1963108+00	1.0115842	.9971325	.5384884
740	.5876830+00	14.8254439	1.0148866	1.6645951	.2695079+08	.3963367+00	.2038442+00	.2038442+00	1.0118677	.9970254	.5384791
750	.6103631+00	14.8020570	1.0153392	1.6644053	.2621115+08	.3962396+00	.2105695+00	.2105695+00	1.0121683	.9968770	.5385358
760	.6303990+00	14.7810297	1.0157316	1.6642157	.2556275+08	.3961619+00	.2163119+00	.2163119+00	1.0124132	.9967329	.5393435
770	.6484920+00	14.7614236	1.0160634	1.6640484	.2497257+08	.3961022+00	.2283548+00	.2283548+00	1.0126114	.9966026	.5405768
780	.6656037+00	14.7414012	1.0163516	1.6639176	.2438457+08	.3960591+00	.2523577+00	.2523577+00	1.0127799	.9964858	.5406857
790	.6838146+00	14.7171333	1.0166264	1.6638091	.2369125+08	.3960258+00	.2903494+00	.2903494+00	1.0129385	.9963724	.5407807
800	.6944241+00	14.7010706	1.0167802	1.6637800	.2324395+08	.3960191+00	.3191042+00	.3191042+00	1.0130265	.9963083	.5409304
810	.7209568+00	14.6511984	1.0172540	1.6637983	.2190945+08	.3960211+00	.4632221+00	.3960212+00	1.0133137	.9961266	.5412543
820	.7542023+00	14.5789233	1.0182047	1.6639034	.2010482+08	.3960774+00	.8540827+00	.3960776+00	1.0138609	.9957339	.5419345
830	.7799133+00	14.5183955	1.0191598	1.6640521	.1870100+08	.3961865+00	.1370745+01	.3961868+00	1.0143719	.9953021	.5423983
840	.8064638+00	14.4503691	1.0203036	1.6640867	.1723011+08	.3961976+00	.2212994+01	.3961980+00	1.0150537	.9948546	.5431125
850	.8295874+00	14.3852432	1.0212945	1.6643079	.1592157+08	.3961132+00	.3320715+01	.3961139+00	1.0158105	.9946303	.5438215
860	.8480288+00	14.3282753	1.0221421	1.6648612	.1485102+08	.3959881+00	.4867927+01	.3959889+00	1.0166453	.9946223	.5444842
870	.8617680+00	14.2822109	1.0230048	1.6654016	.1403165+08	.3957828+00	.5270415+01	.3957838+00	1.0175675	.9946850	.5450639
880	.8778411+00	14.2234459	1.0245881	1.6658795	.1304092+08	.3952842+00	.6225559+01	.3952855+00	1.0191996	.9947408	.5457213
890	.8909219+00	14.1708077	1.0265314	1.6662606	.1220311+08	.3947269+00	.9312163+01	.3947286+00	1.0210730	.9946827	.5461912
900	.9024788+00	14.1198329	1.0288521	1.6671140	.1143453+08	.3943396+00	.1405043+02	.3943419+00	1.0231672	.9944745	.5465905
910	.9126828+00	14.0705107	1.0317341	1.6681216	.1072734+08	.3939820+00	.2151686+02	.3939849+00	1.0256200	.9940739	.5470107
920	.9220237+00	14.0210099	1.0354997	1.6686614	.1004874+08	.3933672+00	.3480179+02	.3933708+00	1.0286955	.9934291	.5474957
930	.9303888+00	13.9723070	1.0401559	1.6687454	.9410531+07	.3925167+00	.5822266+02	.3925214+00	1.0323809	.9925252	.5481850
940	.9379018+00	13.9242270	1.0457813	1.6684048	.8807436+07	.3914398+00	.9902813+02	.3914458+00	1.0367251	.9913403	.5492137
950	.9444264+00	13.8783652	1.0522509	1.6676123	.8255667+07	.3901461+00	.1669489+03	.3901537+00	1.0416353	.9899115	.5505662
960	.9500956+00	13.8347222	1.0596979	1.6660261	.7750039+07	.3884695+00	.2870397+03	.3884791+00	1.0472451	.9882487	.5523967
970	.9551723+00	13.7919792	1.0686258	1.6629941	.7271363+07	.3860783+00	.5141697+03	.3860905+00	1.0539773	.9862922	.5548763
980	.9596244+00	13.7510059	1.0791726	1.6578973	.6826621+07	.3827116+00	.9090523+03	.3827268+00	1.0619838	.9840723	.5581203
990	.9636165+00	13.7108659	1.0918831	1.6497378	.6403324+07	.3779170+00	.1615910+04	.3779360+00	1.0717365	.9815488	.5625116

1000	.9671358+00	13.6721800	1.1066932	1.6377145	.6006952+07	.3714137+00	.2903317+04	.3714374+00	1.0832431	.9788107	.5683364
1010	.9703006+00	13.6341139	1.1234842	1.6210426	.5629174+07	.3629655+00	.5055375+04	.3629947+00	1.0964320	.9759212	.5760715
1020	.9731877+00	13.5959865	1.1409089	1.6002825	.5267147+07	.3530383+00	.8699776+04	.3530745+00	1.1101853	.9730710	.5862854
1030	.9759825+00	13.5552577	1.1563370	1.5773844	.4905679+07	.3427738+00	.1436426+05	.3428195+00	1.1223055	.9705696	.5999850
1040	.9784774+00	13.5150276	1.1634573	1.5607695	.4581899+07	.3360063+00	.2126537+05	.3360651+00	1.1277760	.9693317	.6157281
1050	.9807255+00	13.4752074	1.1607822	1.5570723	.4295739+07	.3351608+00	.3129788+05	.3352383+00	1.1255746	.9696691	.6319582
1060	.9825899+00	13.4393869	1.1542680	1.5670982	.4061260+07	.3395553+00	.4228882+05	.3396570+00	1.1205833	.9708173	.6451060
1070	.9841427+00	13.4075255	1.1528005	1.5824019	.3858279+07	.3447018+00	.5595495+05	.3448325+00	1.1199598	.9715123	.6542090
1080	.9854816+00	13.3783899	1.1617078	1.5926826	.3664640+07	.3460440+00	.7043466+05	.3462080+00	1.1280101	.9709930	.6598725
1090	.9866632+00	13.3511012	1.1830920	1.5907008	.3469882+07	.3409765+00	.9647515+05	.3411768+00	1.1463400	.9689356	.6633529
1100	.9877285+00	13.3248408	1.2173032	1.5749001	.3272514+07	.3294529+00	.1330736+06	.3296918+00	1.1749974	.9652463	.6659016
1110	.9886934+00	13.2992889	1.2633311	1.5479275	.3078200+07	.3131466+00	.1797964+06	.3134262+00	1.2128372	.9600312	.6684227
1120	.9895757+00	13.2740544	1.3195267	1.5138785	.2891779+07	.2941842+00	.2298148+06	.2945074+00	1.2582033	.9535262	.6717406
1130	.9903905+00	13.2487969	1.3823069	1.4774562	.2717279+07	.2749108+00	.2698612+06	.2752833+00	1.3079498	.9462079	.6760594
1140	.9911460+00	13.2233994	1.4472154	1.4427453	.2557723+07	.2570822+00	.2891377+06	.2575134+00	1.3586626	.9388116	.6813521
1150	.9918010+00	13.1995922	1.5062930	1.4146702	.2423699+07	.2425349+00	.2786840+06	.2430333+00	1.4048527	.9326556	.6869907
1160	.9924375+00	13.1746946	1.5652996	1.3912652	.2298549+07	.2295810+00	.2468835+06	.2301663+00	1.4518611	.9275292	.6929373
1170	.9930246+00	13.1500147	1.6232178	1.3730724	.2186681+07	.2183464+00	.2080487+06	.2190379+00	1.4992072	.9236020	.6981414
1180	.9935610+00	13.1258619	1.6818820	1.3579089	.2085733+07	.2082422+00	.1675263+06	.2090592+00	1.5477462	.9202466	.7013195
1190	.9940540+00	13.1021353	1.7434503	1.3432996	.1992373+07	.1986294+00	.1302138+06	.1995930+00	1.5984164	.9168121	.7019208
1200	.9945130+00	13.0785211	1.8086251	1.3276923	.1904159+07	.1891138+00	.9981393+05	.1902491+00	1.6513770	.9130565	.6999698
1210	.9949421+00	13.0548602	1.8753972	1.3112672	.1820937+07	.1798032+00	.7478342+05	.1811423+00	1.7051802	.9092368	.6961902
1220	.9953444+00	13.0310829	1.9416554	1.2953111	.1743337+07	.1709271+00	.5422732+05	.1725110+00	1.7589103	.9058818	.6915295
1230	.9957205+00	13.0072451	2.0054303	1.2811195	.1671965+07	.1627219+00	.3902238+05	.1646026+00	1.8117625	.9034283	.6868236
1240	.9960727+00	12.9832824	2.0645146	1.2688067	.1606177+07	.1552738+00	.2823377+05	.1575188+00	1.8620920	.9019515	.6823500
1250	.9964039+00	12.9590455	2.1165935	1.2576147	.1544707+07	.1485419+00	.2040318+05	.1512410+00	1.9075991	.9012591	.6781371
1260	.9967167+00	12.9343847	2.1601713	1.2470852	.1486763+07	.1424744+00	.1455448+05	.1457461+00	1.9467333	.9011940	.6741849
1270	.9970121+00	12.9092292	2.1946908	1.2374765	.1432176+07	.1370538+00	.1013568+05	.1410527+00	1.9791836	.9018052	.6706311
1280	.9972908+00	12.8834960	2.2193589	1.2290772	.1380779+07	.1322631+00	.6861683+04	.1371915+00	2.0045552	.9032136	.6675942
1290	.9975549+00	12.8568857	2.2329978	1.2216279	.1331792+07	.1280207+00	.4605210+04	.1341540+00	2.0218191	.9054281	.6650731
1300	.9978063+00	12.8290435	2.2335227	1.2147877	.1284509+07	.1242759+00	.3086291+04	.1319984+00	2.0290693	.9084615	.6630701
1310	.9980460+00	12.7995570	2.2192591	1.2086237	.1238517+07	.1210464+00	.2015689+04	.1309042+00	2.0248331	.9123915	.6615873
1320	.9982761+00	12.7677200	2.1881033	1.2031889	.1193095+07	.1183577+00	.1246678+04	.1311651+00	2.0072437	.9173441	.6607095
1330	.9984962+00	12.7328544	2.1365221	1.1984940	.1147802+07	.1163070+00	.7406101+03	.1332940+00	1.9730126	.9234694	.6604120
1340	.9986957+00	12.6960192	2.0638865	1.1948881	.1104413+07	.1151568+00	.4446575+03	.1379124+00	1.9206646	.9306057	.6608164
1350	.9988704+00	12.6579367	1.9715998	1.1926201	.1063743+07	.1151295+00	.2692711+03	.1457182+00	1.8504344	.9385447	.6618983
1360	.9990219+00	12.6186398	1.8618410	1.1921509	.1025654+07	.1165680+00	.1616404+03	.1578710+00	1.7633557	.9471033	.6635305
1370	.9991516+00	12.5784039	1.7380638	1.1941110	.9900868+06	.1199786+00	.9608995+02	.1760695+00	1.6616709	.9560471	.6656413
1380	.9992611+00	12.5377838	1.6049664	1.1994106	.9570768+06	.1261261+00	.5680769+02	.2028652+00	1.5489397	.9650917	.6680830
1390	.9993522+00	12.4976747	1.4689640	1.2098067	.9269315+06	.1363384+00	.3331967+02	.2423825+00	1.4305474	.9738478	.6706744
1400	.9994271+00	12.4591385	1.3378708	1.2287414	.9001749+06	.1529515+00	.1917573+02	.3016977+00	1.3136082	.9818647	.6732318
1410	.9994886+00	12.4231306	1.2192950	1.2628115	.8775736+06	.1800255+00	.1059178+02	.3938355+00	1.2055661	.9887403	.6755218
1420	.9995448+00	12.3866716	1.1104143	1.3347257	.8586566+06	.2306721+00	.4971173+01	.5673957+00	1.1044951	.9946693	.6775518
1430	.9995750+00	12.3656849	1.0587587	1.4124189	.8504906+06	.2783623+00	.2812065+01	.7425925+00	1.0558827	.9972836	.6784429
1440	.9995949+00	12.3515238	1.0321774	1.4853269	.8442787+06	.3179768+00	.1739584+01	.8864091+00	1.0306717	.9985412	.6788723
1450	.9996131+00	12.3390420	1.0161863	1.5550990	.8341406+06	.3520165+00	.1036737+01	.8940406+00	1.0154144	.9992403	.6790734
1460	.9996328+00	12.3288889	1.0087054	1.6031533	.8190465+06	.3734583+00	.6165366+00	.6148136+00	1.0082214	.9995202	.6791062
1470	.9996547+00	12.3219539	1.0062668	1.6256187	.8040448+06	.3828777+00	.3987839+00	.3987838+00	1.0058367	.9995726	.6790256
1480	.9996978+00	12.3129769	1.0052537	1.6433802	.7801971+06	.3899196+00	.2089200+00	.2089200+00	1.0047814	.9995302	.6788351
1490	.9997562+00	12.3054370	1.0064274	1.6453956	.7560697+06	.3903406+00	.1140432+00	.1140432+00	1.0058178	.9993943	.6786209
1500	.9998432+00	12.2978662	1.0076761	1.6430406	.7301753+06	.3891045+00	.5069711-01	.5069711-01	1.0069520	.9992815	.6784970
1510	.9999345+00	12.2901393	1.0114011	1.6294051	.7011916+06	.3828920+00	.1869020-01	.1869020-01	1.0104125	.9990226	.6782313

1520	.9999981+00	12.2863207	1.0112573	1.6286244	.6876515+06	.3826501+00	.8938261-02	.8938261-02	1.0102745	.9990282	.6782693
1530	.1000075+01	12.2838138	1.0101212	1.6309755	.6790382+06	.3838539+00	.3775726-02	.3775726-02	1.0092442	.9991318	.6784186
1540	.1000165+01	12.2826497	1.0076817	1.6388807	.6759583+06	.3875509+00	.1373918-02	.1373918-02	1.0069763	.9993000	.6786935
1550	.1000239+01	12.2823586	1.0059120	1.6460796	.6759096+06	.3908159+00	.5937174-03	.5937174-03	1.0052782	.9993699	.6788289
1560	.1000303+01	12.2823070	1.0050776	1.6509998	.6763621+06	.3929785+00	.2861375-03	.2861375-03	1.0044072	.9993330	.6788475
1570	.1000360+01	12.2823280	1.0049510	1.6542682	.6768356+06	.3943487+00	.1491724-03	.1491724-03	1.0041496	.9992026	.6787760
1580	.1000410+01	12.2823784	1.0053730	1.6564038	.6772381+06	.3951717+00	.8303310-04	.8303310-04	1.0043561	.9989885	.6786300
1590	.1000457+01	12.2824494	1.0062799	1.6577667	.6775690+06	.3956116+00	.4833874-04	.4833874-04	1.0049561	.9986845	.6784229
1600	.1000503+01	12.2825476	1.0077662	1.6585354	.6778470+06	.3957337+00	.2867921-04	.2867921-04	1.0060070	.9982544	.6781267
1610	.1000543+01	12.2826608	1.0096548	1.6587101	.6780447+06	.3955644+00	.1818270-04	.1818270-04	1.0073765	.9977435	.6777674
1620	.1000578+01	12.2827726	1.0118657	1.6584723	.6781870+06	.3951887+00	.1223930-04	.1223930-04	1.0089976	.9971656	.6773724
1628	.1000600+01	12.2828622	1.0136328	1.6580954	.6782627+06	.3948155+00	.9490994-05	.9490994-05	1.0102993	.9967113	.6770640

Литература к главе 1 "Стандартная модель Солнца: современные представления".

Воронцов, С.В., Жарков В.Н. 1988. "Итоги науки и техники", серия "Астрономия", т.38, стр.253.

Abdurashitov, J.N., et al. 1994. *Phys. Lett. B*, **328**, 234.

Ando, H., Osaki, Y. 1975. *Publ. Astron. Soc. Japan*, **27**, 581.

Ando, H., Osaki, Y. 1977. *Publ. Astron. Soc. Japan*, **29**, 221.

Anselmann, P. et al. 1995. *Phys. Lett. B*, **342**, 440.

Antia, H.M., Basu, S. 1994a. *Ap. J.*, **426**, 801.

Antia, H.M., Basu, S. 1994b. *Ap. J. Suppl.*, **107**, 421.

d'Atkinson, R., Houtermans, F.G 1929. *Zeits. f. Physik*, **54**, 656.

Bahcall, J.N., Krastev, P.I. 1996. *Phys. Rev. D*, **53**, 4211.

Bahcall, J.N., Bahcall, N.A., Shaviv G. 1968. *Phys. Rev. Lett.*, **20**, 1209.

Bahcall, J.N., Pinsonneault, M.H. 1992. *Ap. J.*, **395**, L119.

Bahcall, J.N., Pinsonneault, M.H. 1995. *Rev. Mod. Phys.*, **67**, 781.

Bahcall, J.N., Ulrich, R.K. 1988. *Rev. Mod. Phys.*, **60**, 297.

Basu, S., Antia, H.M. 1995. *M.N.R.A.S.*, **276**, 1402.

Baturin, V.A., Vorontsov, S.V. 1995. In *GONG'94: Helio- and Astero-Seismology from Earth and Space*, Eds. R.K.Ulrich, E.J.Rhodes, Jr., W.Dappen, PASP Conference Series, San Francisco, p. 188.

Berthomieu, G., Provost, J., Morel, P., Lebreton Y. 1993. *Astron. Ap.*, **268**, 775.

Berthomieu, G., Provost, J., Rocca, A., Cooper, A. Gough, D.O., Osaki, Y. 1980. In *Nonradial and nonlinear stellar pulsation*. Proceedings of the Workshop, Tucson, Ariz., March 12-16, 1979. (A81-21401 07-90) Berlin, Springer-Verlag, p. 307.

Bethe, H.A., Critchfield, C.L. 1938a. **54**, 248

Bethe, H.A., Critchfield, C.L. 1938b. **54**, 862.

Caughlan, G.R., Fowler, W.A. 1988. *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, **40**, 284.

Chaboyer, B., Demarque, P., Guenther, D.B., Pinsonneault, M.H. 1995. *Ap. J.*, **446**,435.

Chandrasekhar, S. 1939. *Introduction to stellar structure*, University of Chicago Press.

Chou, D.Y., *et al.* 1995. *Solar Phys.*, **160**, 237.

Christensen-Dalsgaard, J. 1982. *M.N.R.A.S.*, **199**, 735.

Christensen-Dalsgaard, J. 1986. In *Mèthodes mathématiques pour l'Astrophysique*, ed. M. Auvergne, A. Baglin. p. 479.

Christensen-Dalsgaard, J. 1992. *Ap. J.*, **385**, 354.

Christensen-Dalsgaard, J. *et al.* 1996. *Science*, **272**, 1286.

Christensen-Dalsgaard, J. Duvall, T.L. Jr., Gough, D.O., Harvey J.W., Rhodes, E.J. Jr. 1985. *Nature* **315**, 378.

Christensen-Dalsgaard, J., Gough, D. O., Thompson, M.J. 1991. *Ap. J.*, **378**, 413.

Christensen-Dalsgaard, J., Hernandes P. 1991. In *Challenges to Theories of the Structure of Moderate Mass Stars*, ed. D.O. Gough & J. Toomre. Heldelberg: Springer. p. 43.

Christensen-Dalsgaard, J., Profitt, C.R., Thompson, M.J. 1993. *Ap. J.*, **403**, L75.

Claverie, A., Isaak, G.R., McLeod, C.P., Van der Raay, H.B., Roca Cortez, T. 1979. *Nature*, **282**, 591.

Claverie, A., Isaak, G.R., McLeod, C.P., Van der Raay, H.B., Roca Cortez, T. 1980. *Astron. Ap.*, **91**, L9.

Claverie, A., Isaak, G.R., McLeod, C.P., Van der Raay, H.B., Roca Cortez, T. 1981. *Nature 1981*, **293**, 443.

Cox, A.N., Guzik, J.A., Kidman R.B. 1989. *Ap. J.*, **342**, 1187.

Cox, J.P., Giuli, R.J. *Principles of Stellar Structure*, New York, Gordon & Breach, 1968.

Däppen, W., Gough, D.O. 1986. In *Seismology of the Sun and the Distant Stars*, ed. by D.O. Gough; Reidel, Dordrecht, p. 275.

Däppen, W., Gough, D.O., Thompson, M.J. 1988. In *Seismology of the Sun and the sun-like stars*, ed. by E.J. Rolfe (ESA SP-286); Noordwijk, p. 505.

Däppen, W., Gough, D.O., Kosovichev, A.G., Thompson, M.J. 1990. In *Challenges to Theories of Moderate Mass Stars*, eds. D.O.Gough, J.Toomre, p. 111.

Däppen, W., Keady, J., Rogers, F. 1991. In *Solar interior and atmosphere*, eds. A.N. Cox, W.C.Livingston, M.Mattews; Space Science Series, University of Arizona Press, p. 112.

Däppen, W., Mihalas, D., Hummer, D.G., Mihalas, B.W., 1988. *Ap. J.*, **332**, 261–270.

Davis, R. 1964. *Phys. Rev. Lett.*, **12**, 303.

Davis, R., Harmer, D.S., Hoffman, K.C. 1968. *Phys. Rev. Lett.*, **20**, 1205.

Deubner, F.-L. 1975. *Astron. Ap.*, **44**, 371.

Deubner, F.-L., Ulrich, R.K., Rhodes, E.J., Jr. 1979. *Astron. Ap.*, **72**, 177.

Duvall, T.L., Harvey, J.W. 1983. *Nature*, **302**, 242.

Duvall, T.L., Harvey, J.W., Libbrecht, K.G., Popp, B.D., Pomerantz, M.A. 1983. *Ap. J.*, **324**, 1158.

Duvall, T.L., Jr. 1982. *Nature*, **300**, 242.

Dziembowski, W. A., Pamyatnykh A.A., Sienkiewicz, R. 1990. *M.N.R.A.S.*, **244**, 542.

Dziembowski, W.A., Goode, P.R., Pamyatnykh, A.A., Sienkiewicz, R. 1994. *Ap. J.*, **432**, 417.

Dziembowski, W.A., Goode, P.R., Pamyatnykh, A.A., Sienkiewicz, R. 1995. *Ap. J.*, **445**, 509.

Eddington, A.S. 1926. *The internal constitution of the stars*, Cambridge University Press.

Eggleton, P.P., Faulkner, J., Flannery, B.P. 1973. *Astron. Ap.*, **23**, 325.

Eghamberdiev, Sh.A., Khalikov, Sh.S., Lazrek, M., Fossat, E. 1992. *Astron. Ap.*, **253**, 252.

Elsworth, Y., Davidson, C., Howe, R., Isaak, G.R., Miller, B., McLeod, C.P., New, R., Speake, B., Van der Raay, H., Wheeler, S. 1991. GONG Report 9, NSO, Tucson.

Emden, V.R. 1907. *Gaskugeln*, Leipzig: Teubner.

Faulkner, J., Swenson, F.J. 1992. *Ap. J.*, **386**, L55.

Fossat, E. 1988. In *Seismology of the Sun and the sun-like stars*, ed. by E.J. Rolfe (ESA SP-286), Noordwijk, p. 161.

Fossat, E., Ricort, G. 1975. *Astron. Ap.*, **43**, 243.

Fossat, E. *et al.* 1995. *GONG'94: Helio- and Astero-Seismology from Earth and Space*, Eds. R.K.Ulrich, E.J.Rhodes, Jr., W.Däppen, PASP Conference Series, San Francisco, p. 24.

Frölich, C. *et al.* 1988. In *Seismology of the Sun and the sun-like stars*, ed. by E.J. Rolfe (ESA SP-286), Noordwijk, p. 359.

Frölich, C. *et al.* 1989. In *The Soho mission*, ESA SP-1104, p. 19.

GONG, 1984. *A proposal to study the solar interior by measuring global oscillations with a world-wide network of instruments*, GONG, NSO, NOAO, Tucson.

Gabriel, A. *et al.* 1989. In *The Soho mission*, ESA SP-1104, p. 13.

Gamow, G. 1928. *Zeits. f. Physik*, **52**, 510.

Gough D.O., Kosovichev A.G. 1993. *M.N.R.A.S.*, **264**, 522.

Gough, D.O. 1977. In *Problems of stellar convection.* Proceedings of the Thirty-eighth Colloquium, Nice, France, August 16-20, 1976. Berlin and New York, Springer-Verlag, p. 349.

Gough, D.O. 1984. *Mem. Soc. Astron. Ital.*, **55**, 13.

Gough, D.O. 1986. In *Seismology of the Sun and the Distant Stars*, ed. D.O.Gough, Reidel, p. 125.

Gough, D.O. *et al.* 1996. *Science*, **272**, 1296.

Grec, G., Fossat, E., Pomerantz, M. 1980. *Nature*, **288**, 541.

Grec, G., Fossat, E., Pomerantz, M. 1983. *Solar Phys.*, **82**, 55.

Guenther, D.B., Demarque, P., Kim, Y.-C., Pinsonneault, M.H. 1992. *Ap. J.*, **387**, 372.

Guenther, D.B., Jaffe, A., Demarque, P. 1989. **345**, 1022.

Guzik, J.A., Cox, A.N. 1991. *Ap. J.*, **381**, 333.

Guzik, J.A., Cox, A.N. 1995. *Ap. J.*, **448**, 905.

Harvey, J.W. *et al.* 1996. *Science*, **272**, 1284.

Hathaway, D.H. *et al.* 1996. *Science*, **272**, 1306.

Henyey, L.G., Forbes, J.E., Gould N.L. 1964. *Ap. J.*, **139**, 306.

Hill, F. *et al.* 1996. *Science*, **272**, 1292.

Hummer, D.G., Mihalas, D., 1988. *Ap. J.*, **331**, 794–814.

Iben, I. 1965. *Ap. J.*, **142**, 1447.

Iben, I., Ehrman, J.R. 1962. *Ap. J.*, **135**, 770.

Kelvin, Lord 1861. Brit. Assoc. Repts., Pt. II, 27-28.

Kelvin, Lord 1887. Phil. Mag., **22**, 287.

Kim, Y.-C., Demarque, P., Guenther, D.B. 1991. *Ap. J.*, **378**, 407.

Kippenhahn, R., Weigert, A., Hofmeister, E. 1967. In *Methods in computational physics, Advances in research and applications*, vol. 7, ed. by B.Alder, S.Fernbach and M.Rotenberg.

Kosovichev, A.G. 1995. In *GONG'94: Helio- and Astro-Seismology from the Earth and space*, ASP Conference Series, **76**, p.89.

Lane, J.H. 1869. *Amer. J. Sci.*, 2d ser., **50**, 57-74.

Leibacher, J.W., Stein R.F. 1971. *Ap. Lett.*, **7**, 191.

Leighton, R.B. 1960. *Proc. IAU Symp. 12*, 321.

Leighton, R.B., Noyes, R.W., Simon G.W. 1962. *Ap. J.*, **135**, 474.

Libbrecht, K.G., Woodard, M.A., Kaufman, J.M. 1990. *Ap. J. Suppl.*, **74**, 1129.

Libbrecht, K.G. 1988. *Ap. J.*, **334**, 510.

Loudagh, S. *et al.* 1992. *Astron. Ap.*, **275**, L25.

Lubow, S.H., Rhodes, E.J. Jr., Ulrich R.K. 1980. In *Nonradial and nonlinear stellar pulsation*. Proceedings of the Workshop, Tucson, Ariz., March 12-16, 1979. (A81-21401 07-90) Berlin, Springer-Verlag, p. 300-306.

Mihalas, D., Däppen, W., Hummer, D.G., 1988. *Ap. J.*, **331**, 815–825.

Paczýnksi, B. 1969. *Acta Astronomica*, **19**, 1.

Paczýnksi, B. 1970. *Acta Astronomica*, **20**, 47.

Perez Hernandez, F., Christensen-Dalsgaard, J. 1994. *M.N.R.A.S.*, **267**, 111.

Rhodes, E.J. Jr., Woodard, M.F., Cacciani, A., Tomczyk, S., Korznennik, S.G., Ulrich, R.K. 1988. *Ap. J.*, **326**, 479.

Richard, O., Vauclair, S., Charbonnel, C., Dziembowski, W.A. 1996. *Astron. Ap.*, in press.

Ritter, A. 1878. *Widemann Ann.*, **5**, 573.
Ritter, A. 1883. *Widemann Ann.*, **20**, 897.
Russell, H.N. 1919. *Publ. Astron. Soc. Pacific*, **31**, 205.
Sackmann, I.-J., Boothroyd, A.I., Fowler, W.A. 1990. *Ap. J.*, **360**, 727.
Scherrer, P.H. *et al.* 1989. In *The Soho mission*, ESA SP-1104, p. 25.
Schwarzchild, M. 1958. *Structure and evolution of the stars*, Princeton University Press.
Stein, R.F., Leibacher, J.W. 1974. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **12**, 407.
Suzuki, Y. 1995. *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)*, **38**, 54.
Thompson, M.J. *et al.* 1996. *Science*, **272**, 1300.
Turck-Chièze, S., Cahen, S., Cassé, M., Doom, C. 1988. *Ap. J.*, **335**, 415.
Turck-Chièze, S., Lopes, I. 1992. *Ap. J.*, **408**, 347.
Ulrich, R.K. 1969. *Ap. J.*, **158**, 427.
Ulrich, R.K. 1970, *Ap. J.*, **162**, 993.
Vorontsov, S.V., Baturin, V.A., Pamyatnykh, A.A. 1991. *Nature*, **349**, 49.
Vorontsov, S.V., Shibahashi, H. 1991. *Publ. Astron. Soc. Japan*, **43**, 739.
von Weizsäcker, C.F. 1937. *Physik Zeits.*, **38**, 176.
Wilson, R.C. 1979. *J. Appl. Opt.*, **18**, 179.
Woodard, M.A. 1987. *Solar Phys.*, **114**, 21.
Woodard, M.A., Hudson, H. 1983. *Nature*, **305**, 589.
Woodard, M.A., Noyes, R.W. 1985. *Nature*, **318**, 449.

Литература к главе 2
"Расчет солнечной модели с высокой точностью".

Allen, C.W. 1973. *Astrophysical Quantities*. University of London Athlone Press.
Ando, H., Osaki, Y. 1975. *Publ. Astron. Soc. Japan*, *27*, 581.
Berthomieu, G., Provost, J., Morel, P., Lebreton, Y. 1993. *Astron. Ap.*, **268**, 775.
Christensen-Dalsgaard J., 1988. *Computational Procedures for GONG Solar Model Project*, Astronomisk Institut, Aarhus University Publication.
Cohen, E.R., Taylor B.N. 1987. *Rev. Mod. Phys.*, **59**, 1121.
Cox J.P., Giuli R.J. *Principles of Stellar Structure*. New York: Gordon and Breach, 1968.
GONG Newsletters, 1991, No. 17, p. 29.
Gingerich, O., Noyes, R.W., Kalkofen, W., Cuny, Y. 1971. *Solar Physics*, **18**, 347.
Henyey, L.G, Vardya, M.S., Bodenheimer, P., 1965, *Ap. J.*, **142**, 841.
Morel, P., Provost, J., Berthomieu G., 1990, Solar Phys., **128**, 7.
Schmiedler, B., Mein P. 1986. *Astron. Ap.*, **161**, 7-11.
Schwarzchild, M. 1958. *Structure and evolution of the stars*, Princeton University Press.

Wilson, R.C., Hudson, H.S., Frolich, C. Brusa R.W. 1986. *Science*, **234**, 1114.

Литература к главе 3 *"Удельная энтропия вещества адиабатической части конвективной зоны".*

Antia, H.M., Chitre, S.M. 1995. *Ap. J.*, **442**, 434.

Böhm-Vitense, E. 1958. *Zs. f. Ap.*, **46**, 108.

Canuto V.M., Mazzitelli I. 1991. *Ap. J.*, **370**, 295.

Däppen, W., Mihalas, D., Hummer, D.G., Mihalas, B.W., 1988. *Ap. J.*, **332**, 261–270.

Faulkner, J., Gilliland, R.L. 1985. *Ap. J.*, **299**, 994.

Hummer, D.G., Mihalas, D., 1988. *Ap. J.*, **331**, 794–814.

Mihalas, D., Däppen, W., Hummer, D.G., 1988. *Ap. J.*, **331**, 815–825.

Ulrich, R.K., Rhodes, E.J.(Jr.) 1977. *Ap. J.*, **218**, 521–529.

Литература к главе 4 *"Непрозрачность вещества и модель внутреннего строения Солнца".*

Росселанд С. 1936. "Астрофизика на основе теории атома", М.-Л., ОНТИ НКТП СССР.

Bahcall, J.N., Ulrich, R. K. 1988. *Rev. Mod. Phys.*, **60**, 297.

Christensen-Dalsgaard, J. 1992. *Ap. J.*, **385**, 354.

Christensen-Dalsgaard, J. 1988. *Computational Procedures for GONG Solar Model Project*, Astronomisk Institut, Aarhus University Publication.

Cox, A.N., Stewart, J.N. 1962. *Ap. J. Suppl.*, **6**, 167.

Cox, A.N., Stewart, J.N. 1965. *Ap. J. Suppl.*, **11**, 1.

Cox, A.N., Stewart, J.N. 1970. *Ap. J. Suppl.*, **19**, 243.

Cox, A.N., Tabor, J. E. 1976. *Ap. J. Suppl.*, **31**, 271.

Däppen, W., Mihalas, D., Hummer, D.G., Mihalas, B.W., 1988. *Ap. J.*, **332**, 261–270.

Eddington, A.S. 1926. *The internal constitution of the stars*, Cambridge University Press.

Eggleton, P.P., Faulkner, J., Flannery, B.P. 1973. *Astron. Ap.*, **23**, 325.

Faulkner, J., Swenson, F.J. 1992. *Ap. J.*, **386**, L55.

Grevesse N. 1984. *Phys. Scripta*, **T8**, 49.

Huebner, W. F., Merts, A. L., Magee, N. H., Argo, M. F. 1977. *Report LA-6760-M*, Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos.

Hummer, D.G., Mihalas, D., 1988. *Ap. J.*, **331**, 794–814.

Iglesias, C. A., Rogers, F. J., 1991. *Ap. J.*, **371**, 408–417.

Iglesias, C.A., Rogers, F.J., Wilson B.G. 1987. *Ap. J.*, **332**, L45.

Keller, G., Meyerott, R.E. 1955. *Ap. J.*, **122**, 32.

Kramers, H.A. 1923. *Phil. Mag.*, **46**, 836.

Mihalas, D., Däppen, W., Hummer, D.G., 1988. *Ap. J.*, **331**, 815–825.

Morse, P.M. 1940. *Ap. J.*, **92**, 27.

Rogers, F.J., Iglesias, C.A. 1992. *Ap. J. Suppl.*, **79**, 507.

Roxburg, I.W. 1991. In *Challenges to Theories of the Structure of Moderate Mass Stars*, pp.57–59, ed. D.O.Gough and J.Toomre (Lecture Notes in Physics, **388**,Springer, Heidelberg, 1991).

Schuster, A. 1903. *Ap. J.*, **17**, 165.

Schuster, A. 1905. *Ap. J.*, **21**, 1.

Schwarzchild, K., 1906. *Göttingen Nach.*, **1**, 41.

Seaton, M.J., Yu Yan, Mihalas, D., Pradhan, A.K., 1994. *M.N.R.A.S.*, **266**, 805.

Strömgren, B. 1932. *Zs. f. Ap.*, **4**, 118.

Strömgren, B. 1933. *Zs. f. Ap.*, **7**, 222.

Weiss, A., Keady, J.J., Magee, N.M. Jr. 1990. *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, **45**, 209.

Литература к главе 5
"Гелиосейсмическая модель Солнца".

Батурин, В.А., Аюков, С.В. 1996. *Астрон. ж.*, **73**, 259.

Воронцов, С.В., Жарков В.Н. 1988. "Итоги науки и техники", серия "Астрономия", т.38, стр.253.

Anders, E., Grevesse, N. 1989. *Geochimica et Cosmochimica Acta*, **53**, 197.

Antia, H.M., Chitre, S.M. 1995. *Ap. J.*, **442**, 434.

Antia, H.M., Basu, S. 1994. *Astron. Ap. Suppl.*, **107**, 421.

Bahcall, J.N. 1994. *Phys. Letters B*, **338**, 276.

Bahcall, J.N., Pinsonneault, M.H. 1992. *Rev. Mod. Phys.*, **64**, 885.

Baturin, V.A., Ajukov, S.V. 1993. In *Inside the Stars*, IAU Colloquium 137, Eds. W.Weiss and A.Baglin, p. 69.

Baturin, V.A., Vorontsov, S.V. 1995. In *GONG'94: Helio- and Astero-Seismology from Earth and Space*, ed R.K.Ulrich, E.J.Rhodes, Jr., W.Dappen, Astronomical Society of the Pacific, Conference Series, San Francisco, p. 188.

Christensen-Dalsgaard, J. 1986. In *Seismology of the Sun and Distant Stars*, ed. D.O.Gough, NATO ASI Series C, **169**, 23.

Christensen-Dalsgaard, J. 1992. *Ap. J.*, **385**, 354.

Christensen-Dalsgaard, J., Gough, D. O., Thompson, M.J. 1991. *Ap. J.*, **378**, 413.

Christensen-Dalsgaard, J., Profitt, C.R., Thompson, M.J. 1993. *Ap. J.*, **403**, L75.

Cox, J.P., Giuli, R.J. *Principles of Stellar Structure*, New York, Gordon & Breach, 1968.

Dziembowski, W.A., Goode, P.R., Pamyatnykh, A.A., Sienkiewicz, R. 1994. *Ap. J.*, **432**, 417.

Elsworth, E. et al. 1994. *Ap. J.*, **434**, 801.

Guzik, J.A., Cox, A.N. 1993. *Ap. J.*, **411**, 394.

Jimenez, A., Pallé, P.L., Roca Cortes, T., Andersen, N.B., Domingo, V., Jones, A.R., Alvarez, M., Ledezma, E. 1988. In *Seismology of the Sun and Sun-Like Stars*, ESA, p. 163.

Libbrecht, K.G., Woodard, M.F., Kaufman, J.M. 1990. *Ap. J. Suppl.*, **74**, 1129.

Rogers, F.J., Swenson, F.J., Iglesias, C.A. 1996. *Ap. J.*, **456**, 902.

Vorontsov, S.V., Shibahashi, H. 1991. *Publ. Astron. Soc. Japan*, **43**, 739.